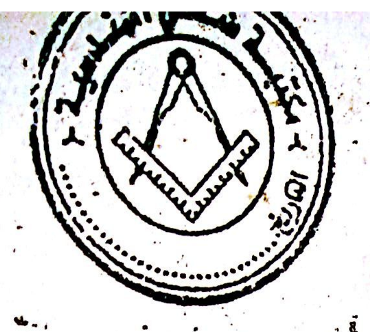


Introduction :مقدمة

Vectors Analysis :تحليل المتجهات

Scalars and Vectors :المقياسيات و المتجهات

يعبر المقياسي عن كمية تحدد قيمتها بعدد حقيقي واحد يمثل مقدار تلك الكمية مثل الكتلة، الكثافة، المقاومة النوعية، الزمن، درجة الحرارة ويعبر عنها بالمتغيرات x, y, z .

أما الكمية المتجه فهي التي يعبر عنها بالمقدار و الأتجاه، مثل القوة و السرعة.

Scalar Field and Vector Field :المجال المقياسي و المجال المتجهي

يعرف المجال رياضيا بانه دالة للمتجه الذي يصل نقطة أصل اختيارية الى نقطة عامة في الفراغ (فراغ ثنائي أو ثلاثي الأبعاد). وتتغير قيمة المجال عامة مع الموضع و الزمن. مثال للمجالات المقياسية: درجة الحراره داخل أناء. أما من أمثلة المجالات المتجه هما: مجال الجاذبية الأرضية و المجال المغنطيسي الأرضي.

جبريا يمثل المقياس بالحروف الكبيره (A,B) أما المتجهه يمثل بالحروف الكبيره و عليها خط أفقي أو مكتوبة بالخط العريض ($\overline{A}, \overline{B}$) أو (A,B).

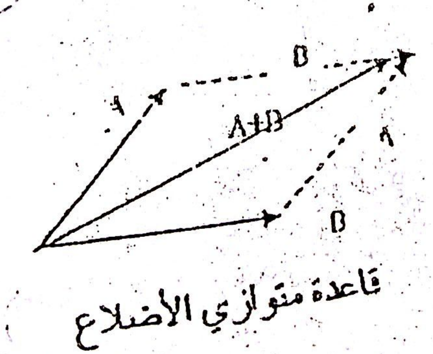
هندسيا يمثل المتجهه بخط عليه سهم (⟶) حيث يمثل طول الخط المقدار و رأس السهم يحدد اتجاه المتجهه.

Vector Algebra :جبر المتجهات

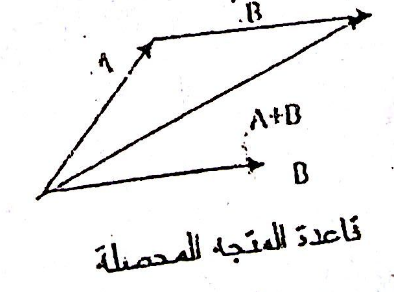
1- $\overline{A}+\overline{B}=\overline{B}+\overline{A}$

2- $\overline{A}+(\overline{B}+\overline{C})=(\overline{A}+\overline{B})+\overline{C}$

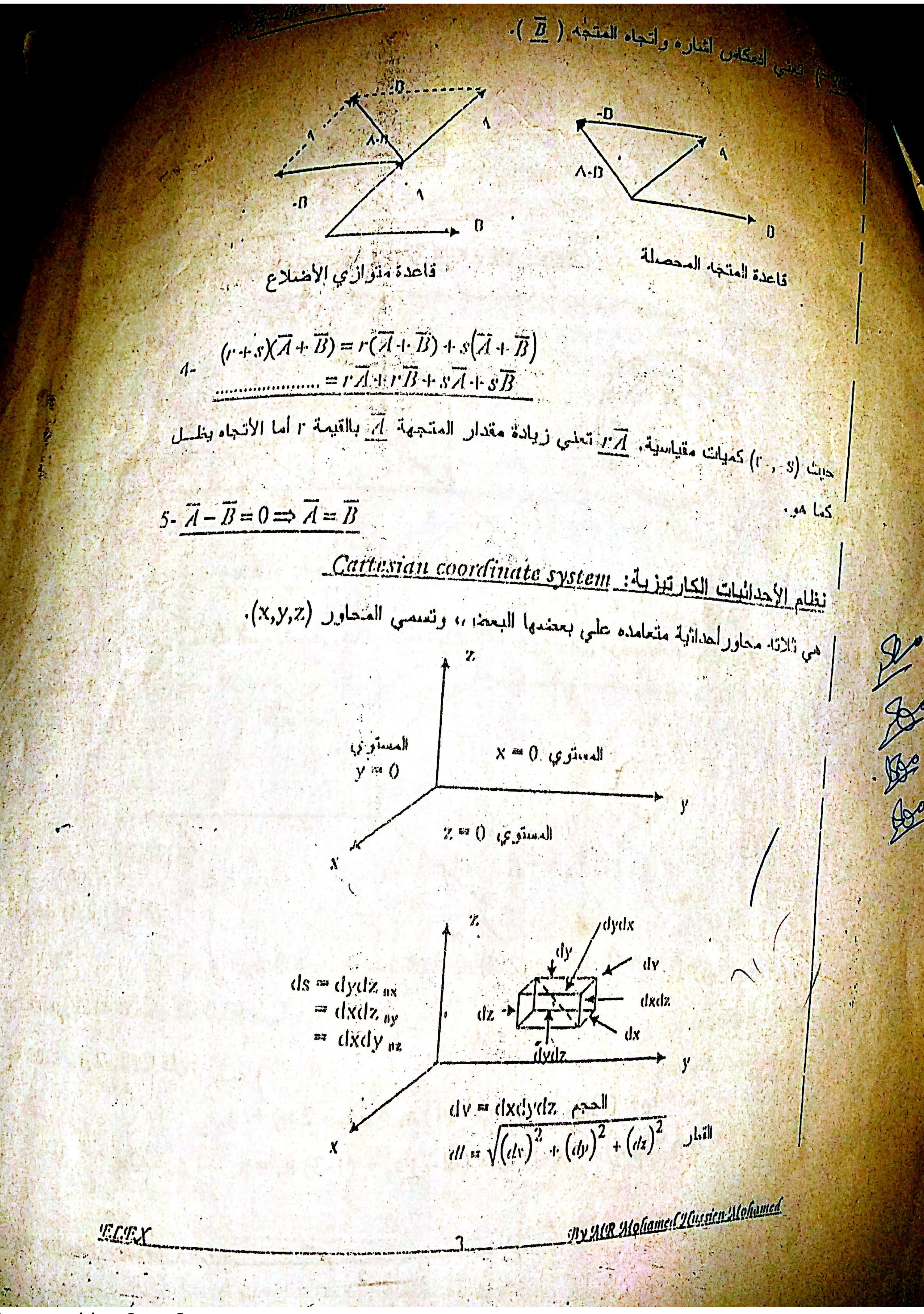
هندسيا يستخدم قانون المتجه المحصلة أو قاعدة متوازي الأضلاع كما موضح في الرسم أدناه.



قاعدة متوازي الأضلاع



قاعدة المتجه المحصلة



(...) تعني امكانية اشاره واتجاه المتجه ($\overline{B}$).

قاعدة متوازي الأضلاع

قاعدة المتجه المحصلة

$$4-\ (r+s)(\overline{A}+\overline{B}) = r(\overline{A}+\overline{B}) + s(\overline{A}+\overline{B})$$
$$= r\overline{A}+r\overline{B}+s\overline{A}+s\overline{B}$$

حيث (r , s) كميات مقياسية، $r\overline{A}$ تعني زيادة مقدار المتجهة $\overline{A}$ بالقيمة r أما الأتجاه يظل كما هو.

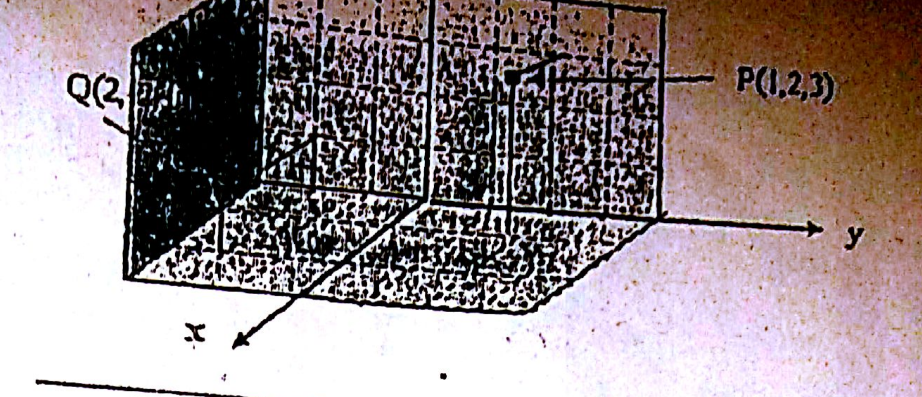
$$5-\ \overline{A}-\overline{B}=0 \Rightarrow \overline{A}=\overline{B}$$

نظام الأحداثيات الكارتيزية: Cartesian coordinate system

هي ثلاثة محاور احداثية متعامده على بعضها البعض، وتسمى المحاور (x,y,z).

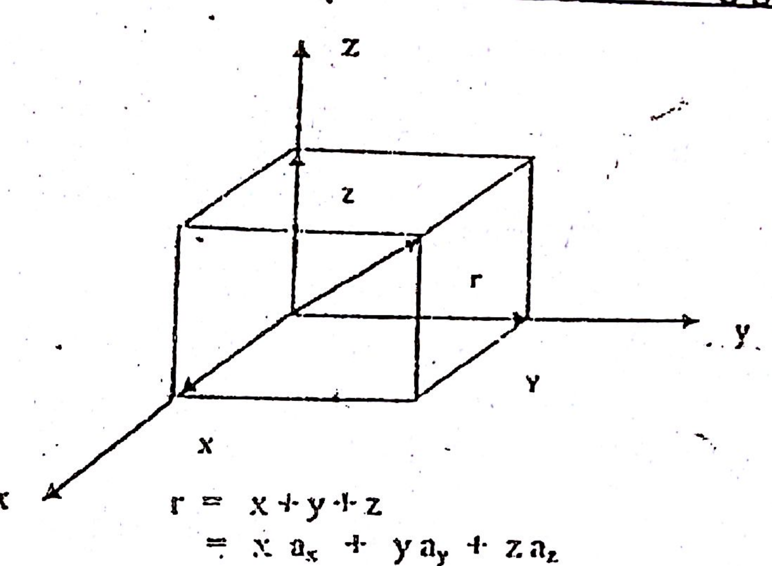
$dv = dxdydz$ الحجم

القطر $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$



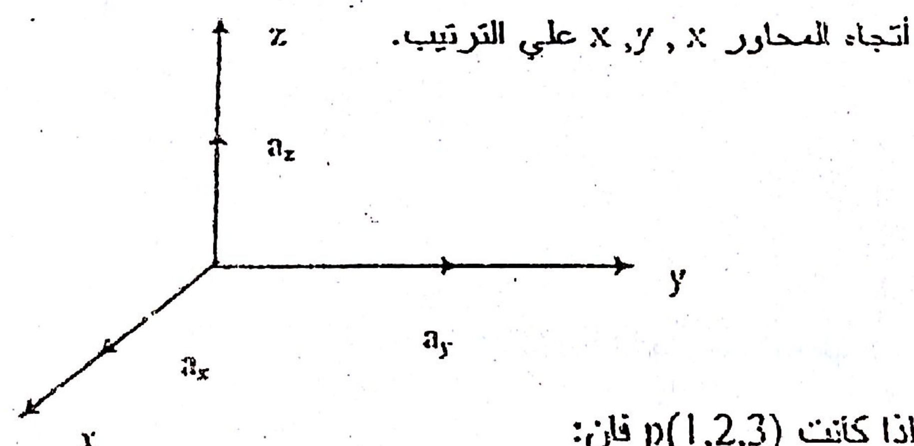
Vector Components and Units Vectors :مركبات المتجه و وحدات المتجهات





$$r = x + y + z$$
$$= x\,a_x + y\,a_y + z\,a_z$$

a_x , a_y , a_z هي وحدات المتجهات في نظام الأحداثيات الكارتيزية وهي موجهــه فــي أتجاه المحاور x , y, x علي الترتيب.



اذا كانت p(1,2,3) فان:

$$r_{op} = r_p = (1-0)\,a_x + (2-0)\,a_y + (3-)\,a_z = a_x + 2\,a_y + 3\,a_z$$

حيث o هي نقطة الأصل (0,0,0) .

و اذا كانت Q(2,-2,1) فان:

$$r_{oQ} = r_Q = (2)\,a_x + (-2)\,a_y + (1)\,a_z = 2a_x - 2\,a_y + a_z$$

$$R_{PQ} = r_Q - r_P = (2-1)\,a_x + (-2-2)\,a_y + (1-3)\,a_z = a_x - 4\,a_y - 2a_z$$

$$R_{QP} = r_P - r_Q = (1-2)\,a_x + (2-(-2))\,a_y + (3-1)\,a_z = -a_x + 4a_y + 2a_z$$

اذا كان المتجه $\overline{B}$ هو :

$$\overline{B} = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$$

فان مقياس المتجه $\overline{B}$ أو مقدار المتجهه $\overline{B}$ هو $|B|$ و يساوي .

$$|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad \text{.......... 1}$$

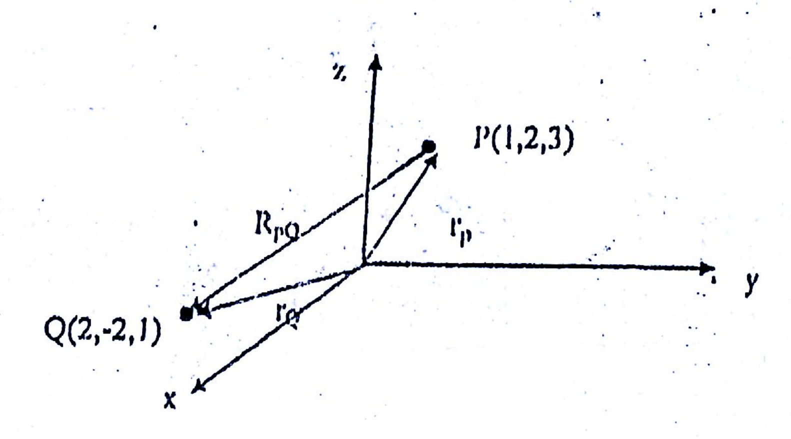
و وحده المتجه $\overline{B}$ هي (a_n) و تساوي:

$$a_B = \frac{\overline{B}}{|B|} = \frac{\overline{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} a_x + \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} a_y + \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} a_z$$

$$\overline{G} = 2a_x - 2a_y + a_z$$

$$|G| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = 3$$

$$a_G = \frac{\overline{G}}{|G|} = \frac{2a_x - 2a_y + a_z}{3} = \frac{2}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y + \frac{1}{3}a_z$$



Example1:-

اذا كان $A(2,-3,1)$ ، $B(-4,-2,6)$ ، $C(1,5,-3)$ أوجد :-

1- المتجه من A الي C.

2- وحده المتجه من B الي A.

3- المسافة من B الي C.

4- المتجه من A الي منتصف الخط المستقيم الواصل بين B الي c.

Solution:

1- $\overline{AC} = ?$

$r_A = 2a_x - 3a_y + a_z$

$r_B = -4a_x - 2a_y + 6a_z$

$r_C = a_x + 5a_y - 3a_z$

$\overline{AC} = r_{AC} = R_{AC} = r_C - r_A = (1-2)a_x + (5-(-3))a_y + (-3-1)a_z$

$\overline{AC} = -a_x + 8a_y - 4a_z$

2- $a_{BA} = ?$

$a_{BA} = \frac{\overline{a_{BA}}}{|a_{BA}|} = \frac{R_{BA}}{|R_{BA}|} = \frac{\overline{BA}}{|BA|}$

$\overline{BA} = r_{BA} = R_{BA} = r_A - r_B = (2-(-4))a_x + (-3-(-2))a_y + (1-6)a_z$

$\overline{BA} = 6a_x - a_y - 5a_z$

$|\overline{BA}| = |R_{BA}| = |r_{BA}| = \sqrt{(6)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = 7.9$

$a_{BA} = \frac{\overline{BA}}{|BA|} = \frac{6a_x - a_y - 5a_z}{7.9} = 0.76a_x - 0.13a_y - 0.64a_z$

3- $|\overline{BC}| = ?$

$\overline{BC} = r_{BC} = r_C - r_B = (1-(-4))a_x + (5-(-2))a_y + (-3-6)a_z = 5a_x + 7a_y - 9a_z$

$|\overline{BC}| = |r_{BC}| = \sqrt{(5)^2 + (7)^2 + (-9)^2} = 12.45$

4-

منتصف المسافة بين B الي C هي D وتساوي:

$D\left(\left(\frac{1+(-4)}{2}\right),\left(\frac{5+(-2)}{2}\right),\left(\frac{-3+6}{2}\right)\right) \Rightarrow D(-1.5,1.5,1.5)$

$r_D = -1.5a_x + 1.5a_y + 1.5a_z$

$\overline{AD} = r_{AD} = \overline{a_{AD}} = r_D - r_A = (-1.5-2)a_x + (1.5-(-3))a_y + (1.5-1)a_z$

$\overline{AD} = -3.5a_x + 4.5a_y + 0.5a_z$



Circular Cylindrical Coordinates (ρ, ϕ, z) :

$$x = \rho\cos\phi \quad \ldots\ldots 1$$
$$y = \rho\sin\phi \quad \ldots\ldots 2$$
$$z = z \quad \ldots\ldots 3$$

تستخدم المعادلات 1,2,3 أعلاه في التحويل من نظام الأحداثيات الأسطوانية الي نظام الأحداثيات الكارتيزية. بتربيع 1,2 أعلاه و جمعهما نحصل علي:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \ldots\ldots 4$$

بقسمة 2 علي 1 نحصل علي

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \phi \quad \ldots\ldots 5 \quad \& \quad z = z \quad \ldots\ldots 6$$

تستخدم المعادلات 4,5,6 أعلاه في التحويل من نظام الأحداثيات الكارتيزية الي نظام الأحداثيات الأسطوانية.

$$ds = \rho d\phi dz\, a_\rho = d\rho dz\, a_\phi = \rho d\rho d\phi\, a_z$$

$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

نظام الأحداثيات الكروية: (Spherical Coordinates System (r,θ,φ

$x = \rho\cos\phi$

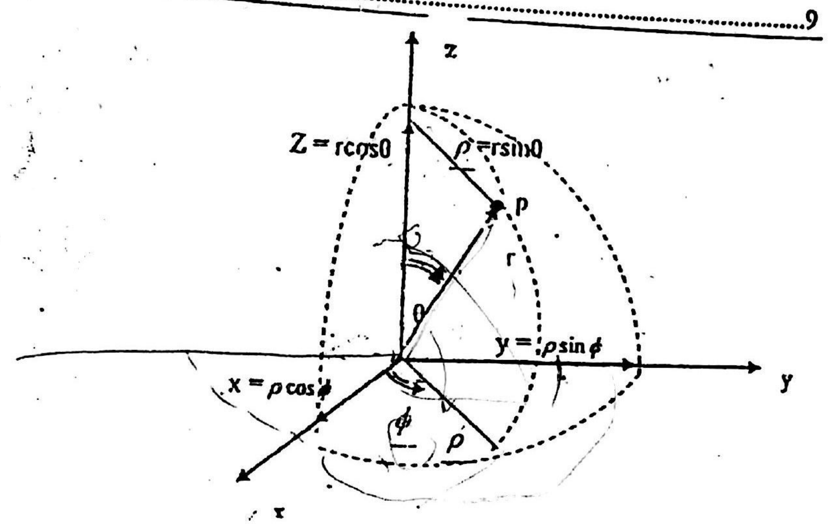
$y = \rho\sin\phi$

$But, \rho = r\sin\theta \rightarrow So, we..have$

$x = r\sin\theta\cos\phi$ 7

$y = r\sin\theta\sin\phi$ 8

$z = r\cos\theta$ 9



المعادلات 7,8,9 أعلاه تستخدم لتحويل من نظام الأحداثيات الكروية الي نظام الأحداثيات الكارتيزية. بتربيع 7,8 أعلاه و جمعهما نحصل علي:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 10

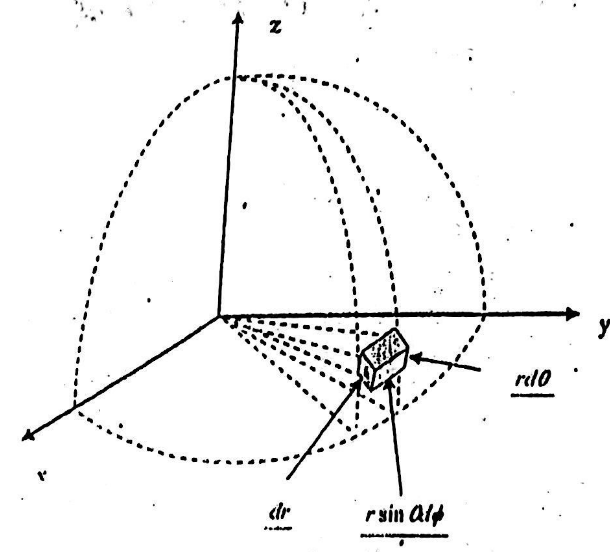
و بالتعويض من المعادلة 10 في المعادلة 9 نحصل علي:

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$ 11

و من العادلتين 7,8 نحصل علي:

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 12

...خدم المعادلات 10,11,12 أعلاه في التحويل من نظام الأحداثيات الكارتيزية الي نظام الأحداثيات الكروية.



$$ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi_{ar} = r\sin\theta dr d\phi_{a\theta} = r dr d\theta_{a\phi}$$

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

الضرب بنقطة: *Dot Product*

اذا كان لدين المتجهين $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ فان الضرب بالنقطة أو الضرب المقياسي يعرف بانه حاصل ضرب مقدار المتجه ومقدار المتجه وجيب تمام الزاوية الصغري المحصوره بينهما.

$$\overline{A}\cdot\overline{B} = |\overline{A}||\overline{B}|\cos\theta_{AB} \qquad 13$$

B

θ_{AB}

A

بما أنه ضرب مقياسي اذن: $\overline{A}\cdot\overline{B} = \overline{B}\cdot\overline{A}$ و اذا كان:

$\overline{A} = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ & $\overline{B} = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ فان $\overline{A}\cdot\overline{B}$ يساوي

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=(A_xa_x+A_ya_y+A_za_z)(B_xa_x+B_ya_y+B_za_z)=$$
$$A_xB_xa_x\cdot a_x+A_xB_ya_x\cdot a_y+A_xB_za_x\cdot a_z+$$
$$A_yB_xa_y\cdot a_x+A_yB_ya_y\cdot a_y+A_yB_za_y\cdot a_z+$$
$$A_zB_xa_z\cdot a_x+A_zB_ya_z\cdot a_y+A_zB_za_z\cdot a_z$$

الزاوية بين $a_x\cdot a_y$ و $a_z\cdot a_x$ و $a_x\cdot a_y$ تساوي 90^o و $\cos(90^o)=0$ اذن:

$$a_x\cdot a_y=a_z\cdot a_x=a_x\cdot a_y=1\times1\cos(90^o)=0$$

الزاوية بين $a_x\cdot a_x$ و $a_y\cdot a_y$ و $a_z\cdot a_z$ تساوي 0^o و $\cos(0^o)=1$ اذن

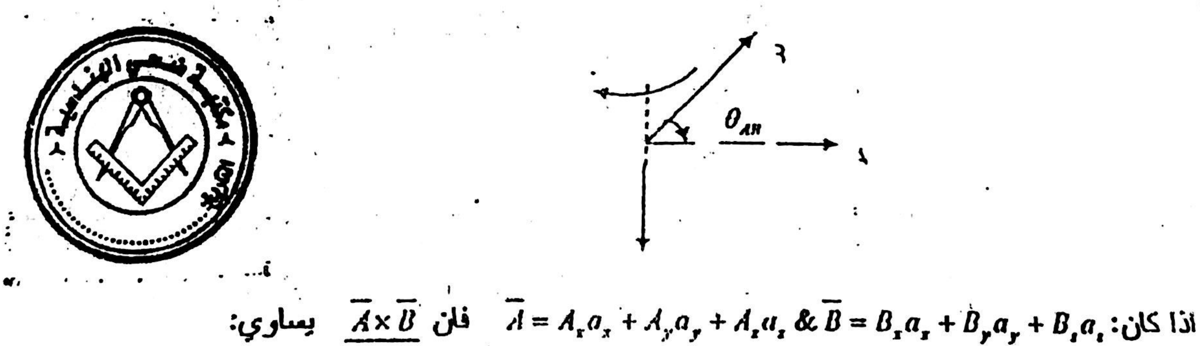
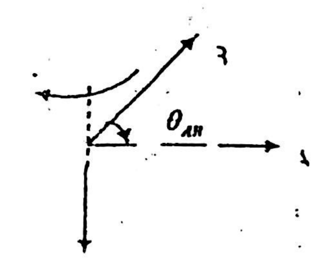
$a_x\cdot a_x=a_y\cdot a_y=a_z\cdot a_z=1\times1\cos(0^o)=1$ اذن $\overline{A}\cdot\overline{B}$ يساوي:

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad\text{.........}14$$

الضرب بعلامة × : *Cross Product*

يعرف الضرب بعلامة × أو الضرب الأتجاهي للمتجهين $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ بانه حاصل الضرب الأتجاهي لمقدار المتجه $\overline{A}$ ومقدار المتجه $\overline{B}$ وجيب الزاوية الصغرى بين A و B و أتجاهه عمودي على المستوي الذي يشمل $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ وفي أتجاه تقدم بريمة يمينية عندما يدور $\overline{A}$ الي أتجاه $\overline{B}$.

$$\overline{A}\times\overline{B}=\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\sin\theta_{AB} \quad\text{.........}15$$

اذا كان: $\overline{A}=A_xa_x+A_ya_y+A_za_z$ & $\overline{B}=B_xa_x+B_ya_y+B_za_z$ فان $\overline{A}\times\overline{B}$ يساوي:

$$\overline{A}\times\overline{B}=(A_xa_x+A_ya_y+A_za_z)(B_xa_x+B_ya_y+B_za_z)=$$
$$A_xB_xa_x\times a_x+A_xB_ya_x\times a_y+A_xB_za_x\times a_z+$$
$$A_yB_xa_y\times a_x+A_yB_ya_y\times a_y+A_yB_za_y\times a_z+$$
$$A_zB_xa_z\times a_x+A_zB_ya_z\times a_y+A_zB_za_z\times a_z$$

الزاوية بين $\underline{a_x \times a_y}$ و $\underline{a_z \times a_x}$ و $\underline{a_y \times a_z}$ تساوي 90° و $\sin(90^\circ) = 1$ اذن:

$\underline{a_x \times a_y} = 1 \times 1 \sin(90^\circ)\, a_N = a_N = a_z$

And $\underline{a_x \times a_z} = -a_y$, $\underline{a_y \times a_z} = a_x$. Also $\underline{a_y \times a_x} = -a_z$, $\underline{a_z \times a_x} = a_y$,

$\underline{a_z \times a_y} = -a_x$.

الزاوية بين $\underline{a_x \cdot a_x}$ و $\underline{a_y \cdot a_y}$ و $\underline{a_z \cdot a_z}$ تساوي 0° و $\sin 0^\circ = 0$ اذن

$\underline{a_x \cdot a_x} = \underline{a_y \cdot a_y} = \underline{a_z \cdot a_z} = 1 \times 1 \sin(0^\circ) = 0$ اذن $\underline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ يساوي:

$$\overline{A} \times \overline{B} = A_x B_y a_z - A_x B_z a_y - A_y B_x a_z + A_y B_z a_x + A_z B_x a_y - A_z B_y a_x$$

$$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right) a_x + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) a_y + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) a_z$$

ويمكن كتابة هذه النتيجة علي الصورة التالية:

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Example:

If $\underline{\overline{A}} = 2a_x - 3a_y + a_z$ & $\underline{\overline{B}} = -4a_x - 2a_y + 5a_z$ find: 1- $\underline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$ and 2- $\underline{\overline{A} \times \overline{B}}$.

Solution:

1- $\underline{\overline{A}} . \underline{\overline{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (2)(-4) + (-3)(-2) + (1)(5)$

$= -8 + 6 + 5 = 3$

2- $$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = (-15 + 2)a_x - (10 + 4)a_y + (-4 - 12)a_z$$

$$= -13a_x - 14a_y - 16a_z$$

Cloumb's law قانون كولوم:

ينص قانون كولوم علي أنه هنالك قوة بين أي شحنتين وهذه القوة تتناسب طرديا مع قيمة كل من الشحنتين و عكسيا مع مربع المسافة بين هاتين الشحنتين مع أخذ نوع الوسط الفاصل بينهما في الأعتبار. اذن

$$F \propto Q_1 Q_2 \text{ and } F \propto \frac{1}{R^2} \text{ so } F \propto \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \text{ or } F = K\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad \text{......16}$$

Q_1, Q_2 الكميات الموجبة أو السالبة للشحنتين وتقاس بالكولوم C.

R المسافة بين الشحنتين وتكون بالمتر m.

F القوة و تقاس بالنيوتن N.

K ثابت التناسب وهو يساوي

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \quad \text{......17}$$

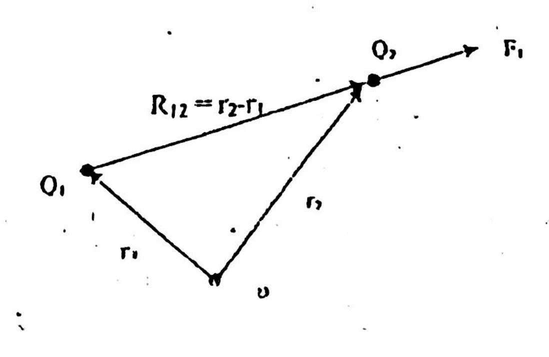
ε_o سماحية الفضاء الحر permittivity و تساوي

$$\varepsilon_o = \frac{1}{36\pi\varepsilon} \times 10^{-9} = 8.854 \times 10^{-12} f/m$$

و يمكن أن يكون التمييز بوحده $C^2/N.m^2$ بدلا من وحده f/m .

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R^2} \quad \text{......18}$$

اذا كانت r_1 ، r_2 موضع كل من Q_1، Q_2 عن نقطة الأصل علي التوالي و F_2 تمثل القوة علي Q_2 نتيجة Q_1 كما في الرسم أدناه اذن F_2 تساوي:



$$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^2} a_{12} \quad \text{......19}$$

$$a_{12} = \frac{R_{12}}{|R_{12}|} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

Where, $|R_{12}| = \sqrt{r_2 - r_1}$

Example:

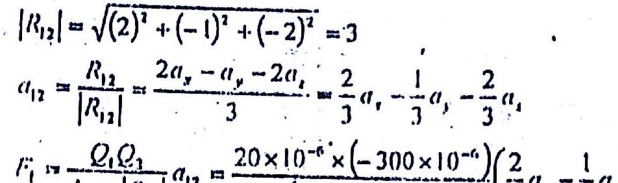
أوجد القوي علي الشحنة Q_1 التي مقدارها 20 μc بسبب الشحنة Q_2 و التي مقدارها -300 μc حيث أن Q_1 عند (0,1,2) m و Q_2 عند (2,0,0) m ؟

Example:

$R_{12} = r_2 - r_1 \quad , \; r_1 = a_y + 2a_z \quad , \; r_2 = 2a_x$

$R_{12} = (2-0)\,a_x + (0-1)\,a_y + (0-2)\,a_z$

$\quad = 2a_x - a_y - 2a_z$



$|R_{12}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$

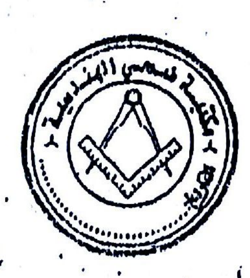
$$a_{12} = \frac{R_{12}}{|R_{12}|} = \frac{2a_x - a_y - 2a_z}{3} = \frac{2}{3}a_x - \frac{1}{3}a_y - \frac{2}{3}a_z$$

$$F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o |R_{12}|}a_{12} = \frac{20\times10^{-6}\times(-300\times10^{-6})}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)(3)^2}\left(\frac{2}{3}a_x - \frac{1}{3}a_y - \frac{2}{3}a_z\right)$$

$F_1 = -4a_x + 2a_y + 4a_z\,N$

$F_2 = -F_1 = 4a_x - 2a_y - 4a_z\,N$

Example:



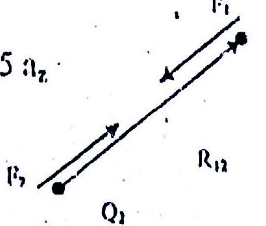
اعتبر شحنة مقدارها 3×10^{-4} C عند النقطة $p_1(1,2,3)$ و شحنة اخري مقدارها -10^{-4} C عند النقطة p_2 (2,0,5) وذلك في الفراغ الحر أوجد القوة الواقعة علي كل شحنة ؟

Solution:

$R_{12} = r_2 - r_1 \quad , \; r_1 = a_x + 2a_y + 3a_z \quad , \; r_2 = 2a_x + 5\,a_z$

$R_{12} = (2-1)\,a_x + (0-2)\,a_y + (5-3)\,a_z$

$\quad = a_x - 2a_y + 2a_z$



$$|R_{12}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$a_{12} = \frac{R_{12}}{|R_{12}|} = \frac{a_x - 2a_y + 2a_z}{3} = \frac{1}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y + \frac{2}{3}a_z$$

$$F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o |R_{12}|} a_{12} = \frac{3\times10^{-4} \times (-10^{-4})}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)(3)^2}\left(\frac{1}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y + \frac{2}{3}a_z\right)$$

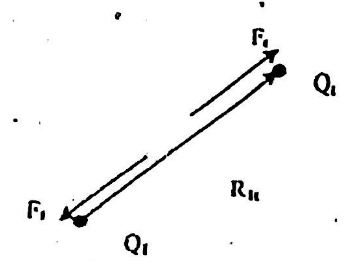
$$F_1 = -10a_x + 20a_y - 20a_z N$$

$$F_2 = -F_1 = 10a_x - 20a_y + 20a_z N$$

شدة المجال الكهربي: Electric Field Intensity

لذا كان هنالك شحنة مقدارها Q_1 وحركت شحنة لخري ببط حولها مقدارها Q_t فان Q_t تظهر وجود مجال قوة. وتبعا لقانون كولوم فان:

$$F_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\varepsilon_o R_{1t}^2} a_{1t} \qquad \text{.........21}$$



بكتابة هذة القوة لكل وحده شحنة فان:

$$\frac{F_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{1t}^2} a_{1t} \qquad \text{.........22}$$

$\frac{F_t}{Q_t}$ تصف مجالا متجها يسمي شدة المجال الكهربي. و يعرف بأنه متجهة القوة علي وحده موجبة لشحنة أختبار و يرمز له بالرمز E أذن:

$$E = \frac{F_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_{1t}^2} a_{1t} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R^2} a_R \;\text{.........}V/m\text{.........23}$$

في نظام الأحداثيات الكارتيزية تكون شدة المجال الكهربي E علي النحو التالي:

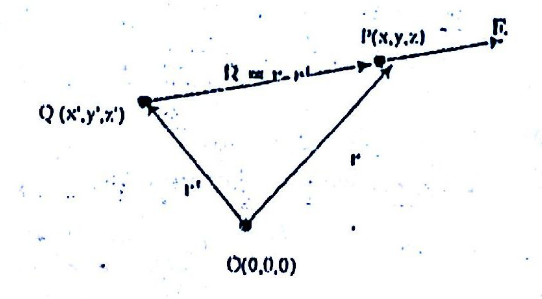
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2+z^2\right)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}a_y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}a_z\right)$$

و لشحنة Q موضوعة عند نقطة المنبع $r' = x' a_x + y' a_y + z' a_z$ يكون المجال عند نقطة عامة $r(x,y,z)$ او $r = x\,a_x + y\,a_y + z\,a_z$ كالاتي:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|r-r'|^2}\frac{r-r'}{|r-r'|}$$

$$E(r) = \frac{Q(r-r')}{4\pi\varepsilon_o|r-r'|^3}$$

$$E(r) = \frac{Q[(x-x')a_x + (y-y')a_y + (z-z')a_z]}{4\pi\varepsilon_o[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,v/m \quad ....25$$



Example:

اوجد شدة المجال الكهربي E عند النقطة m (0,3,4) بالاحداثيات الكارتيزية نتيجة لشحنة نقطية مقدارها $Q = 0.5\ \mu c$ في فراغ حر موضوعة عند نقطة الأصل؟.

Solution:

$$\vec{R} = (0-0)a_x + (3-0)a_y + (4-0)a_z$$

$$\vec{R} = 3a_y + 4a_z \;..and..\; |R| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$a_R = \frac{3a_y + 4a_z}{5} = 0.6a_y + 0.8a_z$$

$$\therefore E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|R|^2}a_R = \frac{0.5\times10^{-6}}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)(5)^2}(0.6a_y + 0.8a_z)$$

$$E = 180(0.6a_y + 0.8a_z)\,.v/m$$

اي ان $|E| = 180$ فولت / متر و في اتجاه $a_R = 0.6a_y + 0.8a_z$.

Example:

أوجد شدة المجال الكهربي عند النقطة p(-4,6,-5) في فضاء حر الناتج عن شحنة مقدارها 0.1mc عند: 1. نقطة الأصل. 2. عند النقطة (2,-1,-3).

Solution:

1.

$$\overline{R}=(-4-0)a_x+(6-0)a_y+(-5-0)a_z$$

$$\overline{R}=-4a_x+6a_y-5a_z..and.|R|=\sqrt{16+36+25}=\sqrt{77}$$

$$a_R=\frac{-4a_x+6a_y-5a_z}{\sqrt{77}}=-\frac{4}{\sqrt{77}}a_x+\frac{6}{\sqrt{77}}a_y-\frac{5}{\sqrt{77}}a_z$$

$$\therefore E=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|R|^2}a_R=\frac{0.1\times10^{-3}}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)(\sqrt{77})^2}\left(-\frac{4}{\sqrt{77}}a_x+\frac{6}{\sqrt{77}}a_y-\frac{5}{\sqrt{77}}a_z\right)...v/m$$



2.

$$\overline{R}=(-4-2)a_x+(6+1)a_y+(-5+3)a_z$$

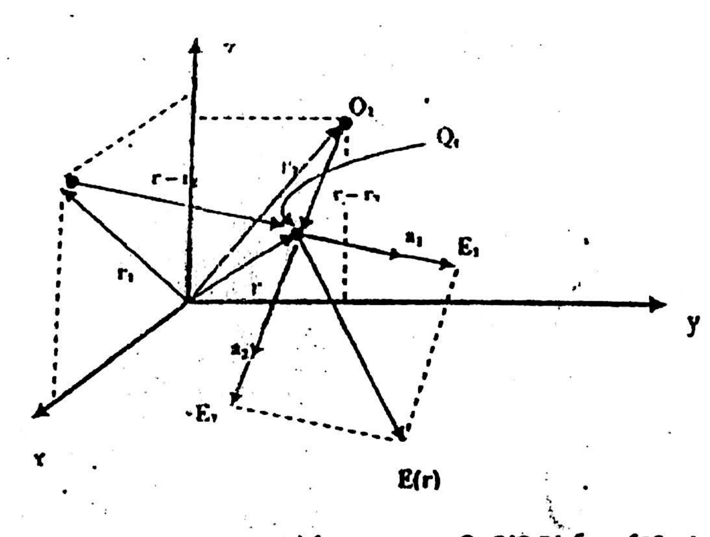
$$\overline{R}=-6a_x+7a_y-4a_z.and.|R|=\sqrt{36+49+16}=\sqrt{101}$$

$$a_R=\frac{-6a_x+7a_y-4a_z}{\sqrt{101}}=-\frac{6}{\sqrt{101}}a_x+\frac{7}{\sqrt{101}}a_y-\frac{4}{\sqrt{101}}a_z$$

$$\therefore E=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0|R|^2}a_R=\frac{0.1\times10^{-3}}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)(\sqrt{101})^2}\left(-\frac{6}{\sqrt{101}}a_x+\frac{7}{\sqrt{101}}a_y-\frac{4}{\sqrt{101}}a_z\right)...v/m$$

مجال n من الشحنات النقطية: The Field of n Point Charg

شدة المجال نتيجة شحنتين نقطيتين Q_1 عند r_1 و Q_2 عند r_2 هي مجموع القوي علي Q_1 بسبب Q_1 و Q_2 عندما تعمل كل منهما علي حده.



$$E(r) = E_1 + E_2$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|r-r_1|^2}a_1 \ldots \& \ldots E_2 = \frac{Q2}{4\pi\varepsilon_o|r-r_2|^2}a_2$$

$$\therefore E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|r-r_1|^2} + \frac{Q2}{4\pi\varepsilon_o|r-r_2|^2}a_2 \ldots\ldots 26$$

و لعدد n من الشحنات فان المجال الكلي الناتج يساوي:

$$\therefore E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|r-r_1|^2}a_1 + \frac{Q2}{4\pi\varepsilon_o|r-r_2|^2}a_2 + \ldots\ldots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_o|r-r_n|^2}a_n$$

$$E(r) = \sum_{m=1}^{n}\frac{Q_m}{4\pi\varepsilon_o|r-r_m|^2}a_m \ldots\ldots 27$$

Example:

شحنة نقطية Q_1 مقدارها 2 µc موضوعة عند النقطة $P_1(-3,7,-4)$ في فضاء حر بينما الشحنة Q_2 و التي مقدارها 5 µc - موضوعة عند النقطة $P_2(2,4,-1)$. اوجد اتجاه و قيمة شدة المجال الكهربي الكلي الناتج عن الشحنتين اعلاه عند النقطة (12,15,18).

$E = E_1 + E_2$

Solution:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o|r-r_1|^2}a_1$$

$+$

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o|r-r_2|^2}a_2$$

$$R_1 = (12-(-3))a_x + (15-7)a_y + (18-(-4))a_z = 15a_x + 8a_y + 22a_z$$

$$|R_1| = \sqrt{15^2 + 8^2 + 22^2} = \sqrt{773} \text{...and...} a_{R_1} = \frac{15a_x + 8a_y + 22a_z}{\sqrt{773}}$$

$$R_2 = (12-2)a_x + (15-4)a_y + (18-(-1))a_z = 10a_x + 11a_y + 19a_z$$

$$|R_2| = \sqrt{10^2 + 11^2 + 19^2} = \sqrt{582} \text{...and...} a_{R_2} = \frac{10a_x + 11a_y + 19a_z}{\sqrt{582}}$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o |R_1|^2} a_{R_1} = \frac{2\times10^{-6}}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}10^{-9}\right)\left(\sqrt{773}\right)^2}\left(\frac{15a_x + 8a_y + 22a_z}{\sqrt{773}}\right) = 12.574_{ax} + 6.706_{ay} + 1$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o |R_2|^2} a_{R_2} = \frac{-5\times10^{-6}}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}10^{-9}\right)\left(\sqrt{582}\right)^2}\left(\frac{10a_x + 11a_y + 19a_z}{\sqrt{582}}\right) = -32.088_{ax} - 35.258_{a}$$

$$E(r) = E_1 + E_2 = -19.514_{ax} - 28.552_{ay} - 42.509_{az}$$

$$|E(r)| = 54.8 v/m \text{......in...direction...of....} a_{E(r)} = \frac{E(r)}{|E(r)|} = -0.356_{ax} - 0.521_{ay} - 0.776_{az}$$



المجال نتيجة توزيع حجمي متصل للشحنات:

Field due to continuous volume distribution of charges

اذا كانت هنالك منطقة من الفراغ تحتوي علي عدد هائل من الشحنات المنفصلة عن بعضها بمسافات قصيرة جدا، فان الممكن أحلال هذا التوزيع " أستبدال هذا التوزيع " لجسيمات الصغيرة جدا بتوزيع متصل يوصف بكثافة شحنة حجمية.

نرمز لكثافة الشحنة الحجمية ب ρ وتقاس بالكولوم / متر مكعب c/m^3 بفرض أن هنالك شحنة صغيرة مقدارها ΔQ موجودة في حجم صغير هو Δv اذن:

$$\Delta Q = \rho \Delta v \quad \text{..........} 28$$

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad \text{..........} 29$$

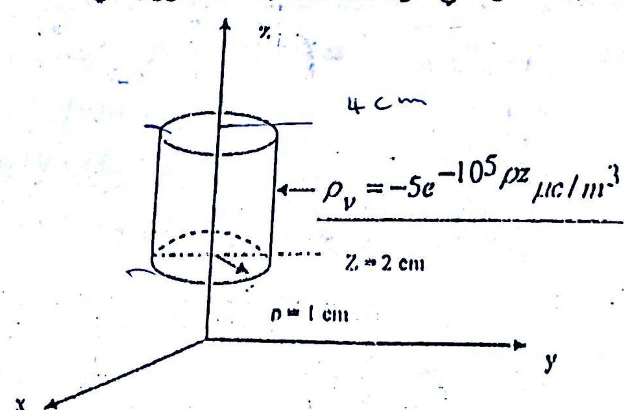
... الكلية داخل حجم ما محدد يمكن الحصول عليها بالتكامل علي ذلك الحجم كالاتي:

$$Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \rho dv \qquad (30)$$

dv يؤول الي تكامل حجمي في الأحداثيات الكارتيزية و Δv تساوي dxdydz.

Example:

أوجد الشحنة الكلية المحتواه في طول 2 cm الحزمة الالكترونية في الشكل أدناه.



Solution:

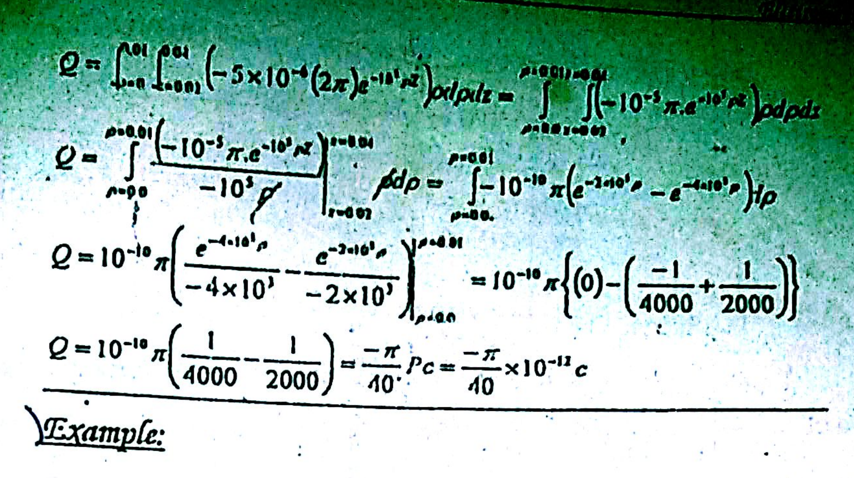
$$\rho_v = -5e^{-10^5 \rho z} \mu c/m^3 = -5\times10^{-6} e^{-10^5 \rho z} c/m^3$$

في الأحداثيات الكارتيزية $dv = dxdydz$ و في الأحداثيات الأسطوانية $dv = \rho d\rho d\phi dz$ و الأحداثيات الكروية $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv = \int_z \int_\phi \int_\rho \left(-5\times10^{-6} e^{-10^5 \rho z}\right) \rho d\rho d\phi dz$$

$$Q = \int_{z=0.02}^{0.04} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{0.01} \left(-5\times10^{-6} e^{-10^5 \rho z}\right) \rho d\rho d\phi dz$$

نكامل اولا ل φ ثم ل z ثم ل ρ اذن:



$$Q=\int_{z=0}^{0.01}\int_{\rho=0.001}^{0.01}\left(-5\times10^{-6}(2\pi)e^{-10^5\rho z}\right)\rho\,d\rho\,dz=\int\int\left(-10^{-5}\pi e^{-10^5\rho z}\right)\rho\,d\rho\,dz$$

$$Q=\int_{\rho=0.0}^{\rho=0.01}\left.\frac{-10^{-5}\pi e^{-10^5\rho z}}{-10^5\rho}\right|_{z=0.02}^{z=0.04}\rho\,d\rho=\int_{\rho=0.0}^{\rho=0.01}-10^{-10}\pi\left(e^{-2\times10^3\rho}-e^{-4\times10^3\rho}\right)d\rho$$

$$Q=10^{-10}\pi\left(\frac{e^{-4\times10^3\rho}}{-4\times10^3}-\frac{e^{-2\times10^3\rho}}{-2\times10^3}\right)_{\rho=0.0}^{\rho=0.01}=10^{-10}\pi\left\{(0)-\left(\frac{-1}{4000}+\frac{1}{2000}\right)\right\}$$

$$Q=10^{-10}\pi\left(\frac{1}{4000}-\frac{1}{2000}\right)=\frac{-\pi}{40}Pc=\frac{-\pi}{40}\times10^{-12}c$$

Example:

أوجد الشحنة الكلية داخل الحجم $p_v=10ze^{(-0.1x)}\sin(\pi y)$ حيث

$$-1\le x\le2\ldots and\ldots0\le y\le1\ldots and\ldots3\le z\le3.6$$

كذلك أوجد الشحنة الكلية داخل الحجم $P_v=4xyz$ حيث ان الحجم محدد بالاتي:

$P_v = 4\rho^3 \cos\phi \sin\phi\, z\, d\rho\, \rho\, d\phi\, dz$

$$0\le\rho\le2\ldots and\ldots0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\ldots and\ldots0\le z\le3$$

Solution:

Ans. 36.1 c and 36.0 c

Example:

أوجد الشحنة الكلية داخل الكون اذا كانت كثافة الشحنة الحجمية المحتواه داخل الكون تعطي بالعلاقة التالية:

$$\rho_v=\frac{3\pi\sin\theta\cos^2\phi}{(2r^2)(r^2+1)}$$

Solution:

Ans. 36.5

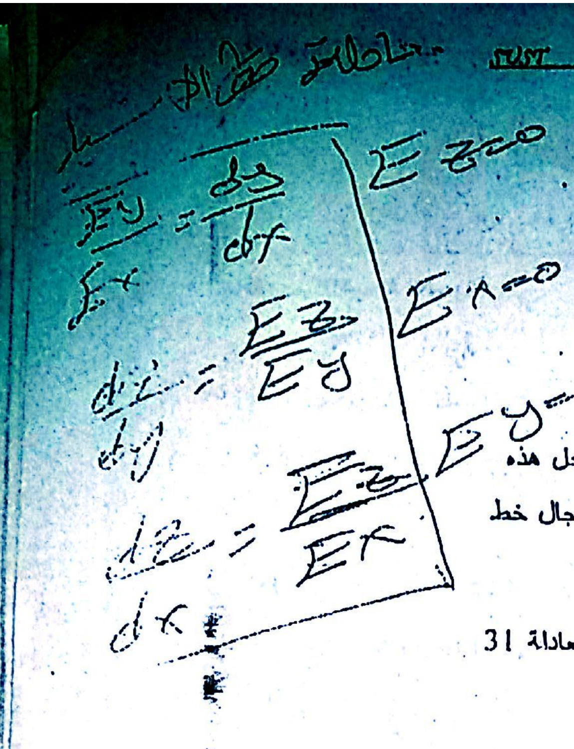
خطوط الأنسياب و الرسوم التخطيطية للمجالات:

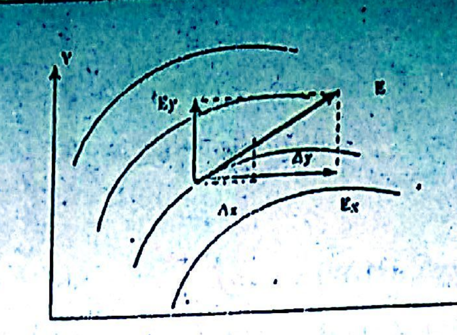
Streamlines and Sketch of the Fields

الرسم التخطيطي يقتصر عاده علي المجالات ذات البعدين لذلك يمكن وضع $E_z=0$ اذا يكون:

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{dy}{dx}\quad\ldots\ldots31$$







ويمكن الحصول على معادلة خطوط الأنسياب بحل المعادلة التفاضلية رقم 31 أعلاه حل هذه المعادلة يؤول الي تكامل خطي أي أن الشحنات موزعة على خط بمعني ان هنالك مجال خط شحنة منتظم هو ρ_L c/m.

أما اذا وضعنا $E_y = 0$ تأخذ المعادلة رقم 31 الصيغة التالية: $\frac{E_z}{E_x} = \frac{dz}{dx}$ وتصبح المعادلة 31

على النحو التالي وذلك اذا وضعنا $E_x = 0$: $\frac{E_z}{E_y} = \frac{dz}{dy}$

اذا كان هنالك شدة مجال كهربي في الأحداثيات الكارتيزية معطي بالعلاقة التالية:

$E = \frac{x}{x^2+y^2} a_x + \frac{y}{x^2+y^2} a_y ... v/m$ فان حل المعادلة 31 يكون على النحو التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} .... E_x = \frac{x}{x^2+y^2} .... E_y = \frac{y}{x^2+y^2} ...... so ..... \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) / \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} .... or ... \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} .... \Rightarrow ..... \ln y = \ln x + \ln c ..... or ...... \ln y = \ln x + c_1 = \ln cx$$

$$\therefore y = cx$$

وهي معادلة خط الأنسياب الناتجة عن حل المعادلة التفاضلية رقم 31 أعلاه.

Example:

أوجد معادلة خط الأنسياب المار بالنقطة (1,2,3) في المجال الكهربي المعطي في الأحداثيات الكارتيزية بالعلاقة التالية: $E = y a_x + x a_y$ v/m

Solution:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{E_y}{E_x}.........E_x = y...........E_y = x......so......\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}...\Rightarrow ..ydy = xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+c....at..(1,2,3).....\frac{1}{2}(2)^2=\frac{1}{2}(1)^2+c....or...c=3....\therefore y^2-x^2=3$$

لذن معادلة خط الأنسياب هي: $y^2-x^2=3$

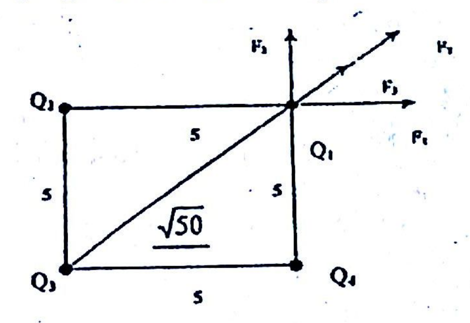
Example: (H.W)

أوجد معادلة خط الأنسياب المار بالنقطة (1,2,3) خلال المجال الكهربي المعبرعنة بالعلاقة التالية : $E=(x+y)\,a_x+(x-y)\,a_y$ v/m.

Examples:

❶ وضعت شحنات نقطية متماثلة قيمة كل منها 3 μc عن الأركان الأربعة لمربع.طول ضلعة 5 cm في فضاء حر . أوجد مقدار القوة علي كل شحنة؟.

Solution:



$$F_1=\frac{3\times10^{-6}\times3\times10^{-6}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(5\times10^{-2})^2}=\frac{9\times9\times10}{25}=32.4N$$

$$F_2=\frac{3\times10^{-6}\times3\times10^{-6}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(5\times10^{-2})^2}=\frac{9\times9\times10}{25}=32.4N$$

$$F_3=\frac{3\times10^{-6}\times3\times10^{-6}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(\sqrt{50}\times10^{-2})^2}=\frac{9\times9\times10}{50}=16.2N$$

$$F_{Q1}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}=\sqrt{\overline{F_1}^2+\overline{F_2}^2}+\overline{F_3}=\sqrt{32.4^2+32.4^2}+16.2=61.9N$$

$$F_{Q2}=F_{Q3}=F_{Q4}=F_{Q1}=61.9\text{ N}$$

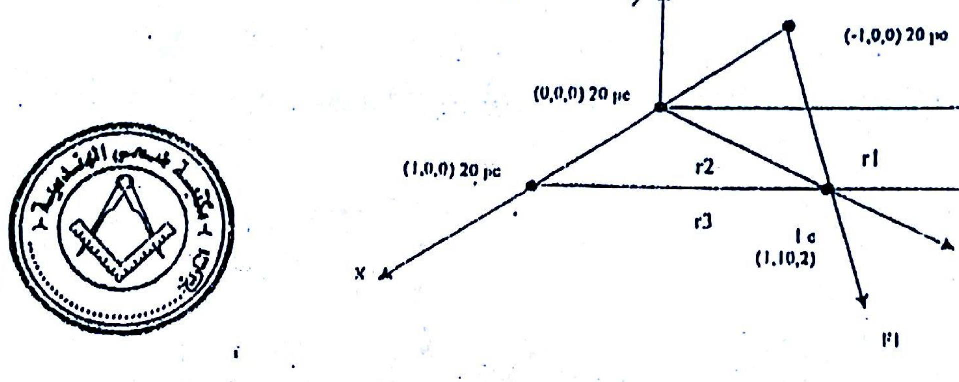
... شحنات نقطية قيمة كل شحنة 20 pc موضوعة في فضاء حر على طول المحور
... عند x = -1 ، x = 0 ، x = 1 المطلوب:

1- أوجد القوي المحصلة علي شحنة مقدارها 1c موضوعة عند النقطة (1,10,2).

2- استبدلت الشحنات الثلاث بشحنة مقدارها 60 pc وضعت عند نقطة الأصل أوجد القوي علي الشحنة 1c في هذه الحالة أيضا.

3- ماذا تلاحظ عن الأجابتان ؟.

Solution:



1-

$r_1 = 2a_x + 10\,a_y + 2a_z \qquad |r_1| = \sqrt{108} = 10.39$

$r_2 = a_x + 10\,a_y + 2_z\,,\ |r_2| = \sqrt{105} = 10.25$ and $r_3 = 10\,a_y + 2a_z\,,\ r_3| = \sqrt{104} = 10.2$

$$F_1 = \frac{Q_1Q}{4\pi\varepsilon_o R_1^2}a_{R1} = \frac{20\times10^{-6}\times1}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\sqrt{108}\right)^2}\left(\frac{2a_x+10a_y+2a_z}{\sqrt{108}}\right)N$$

$$F_2 = \frac{Q_2Q}{4\pi\varepsilon_o R_2^2}a_{R2} = \frac{20\times10^{-6}\times1}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\sqrt{105}\right)^2}\left(\frac{a_x+10a_y+2a_z}{\sqrt{105}}\right)N....and...$$

$$F_3 = \frac{Q_3Q}{4\pi\varepsilon_o R_3^2}a_{R3} = \frac{20\times10^{-6}\times1}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\sqrt{104}\right)^2}\left(\frac{10a_y+2a_z}{\sqrt{104}}\right)N$$

$$F_{Q1c} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = 0.487a_x + 4.97a_y + 0.99a_z....nN$$

2-

$r = a_x + 10\,a_y + 2a_z \qquad |r| = \sqrt{105} = 10.25$

$$F_{U\,1,r} = \frac{60\times10^{-6}\times1}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\sqrt{105}\right)^2}\left(\frac{a_x+10a_y+2a_z}{\sqrt{105}}\right)N = 0.501a_x+5.01a_y+1.002a_z\ldots N$$

❸ شحنتان نقطيتان قيمتهما 12 nc , 5 nc – وضعتا في فضاء حرٍ عند النقطتين , (2,7,4)

(6,2,1) علي الترتيب أوجد

1- مقدار القوة المؤثره علي كل شحنة.

2- مقدار المجال الكهربي عند النقطة (4,4,4).

Solution:

1- $r_{12} = (2-6)\,a_x + (7-2)\,a_y + (4-1)\,a_z$

$= -4\,a_x + 5\,a_y + 3\,a_z$

$|r_{12}| = \sqrt{50}$

$$F_2 = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^{\ 2}}a_{R12}$$

$$F_2 = \frac{12\times10^{-9}\left(5\times10^{-9}\right)}{4\pi\left(\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right)\left(\sqrt{50}\right)^2}\left(\frac{-4a_x+5a_y+3a_z}{\sqrt{50}}\right)$$

$F_2 = 10.8(-0.566a_x + 0.707a_y + 0.424a_z)N$....and....

$F_1 = 10.8(0.566a_x - 0.707a_y - 0.424a_z)N$

2- $R_1 = (4-2)\,a_x + (4-7)\,a_y + (4-4)\,a_z = 2\,a_x - 3\,a_y$

$|R_1| = \sqrt{13}$

$R_2 = (4-6)\,a_x + (4-2)\,a_y + (4-1)\,a_z = -2\,a_x + 2\,a_y + 3\,a_z$

$|R_2| = \sqrt{17}$

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o R_1^2} a_{R1} = \frac{-5\times10^{-9}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\sqrt{13}\right)}\left(\frac{2a_x - 3a_y}{\sqrt{13}}\right)$$

$$E_1 = -1.92a_x + 2.88a_y \, v/m$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_2^2} a_{R2} = \frac{12\times10^{-9}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\left(\sqrt{17}\right)}\left(\frac{-2a_x + 2a_y + 3a_z}{\sqrt{17}}\right)$$

$$E_2 = -3.082a_x + 3.082a_y + 4.622a_z$$

$$E(t) = E_1 + E_2 = -5.002a_x + 5.962a_y + 4.622a_z \, v/m$$

❹ وضعت شحنات نقطية في فضاء كما يلي $Q1 = -6\ \mu c$ عند $P1\ (1,0,0)$ و $Q2 = 10\ \mu c$ عند $P2\ (2,0,0)$ و $Q3 = 4\ \mu c$ عند $P3\ (4,0,0)$ فاي من الشحنات عليها أكبر القوي مقدارها و ما هو مقدار تلك القوة ؟.

Solution:

Z
Q1
-6 μc
(1,0,0)
Q2
10 μc
(2,0,0)
Q3
4 μc
(4,0,0)
1
Y
F12
F21 F32
2
X
F23

$$F_{12} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^2} a_{R12} = \frac{6\times10^{-6}\times10\times10^{-6}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(1)^2} a_{R12} = 0.54a_{R12} N$$

$$F_{21} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_o R_{12}^2} a_{R21} = 0.54a_{R21} N$$

$$F_{32} = \frac{Q_2Q_3}{4\pi\varepsilon_o R_{23}^2} a_{R32} = \frac{10\times10^{-6}\times4\times10^{-6}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(2)^2} a_{R32} = 0.09a_{R32} N$$

$$F_{23} = \frac{Q_2Q_3}{4\pi\varepsilon_o R_{23}^2} a_{R23} = 0.09a_{R23} N$$

القوي الكلية الواقعة علي الشحنة Q_1 هي F_{12} و تساوي 0.54 N في أتجاه a_{R12}.

القوي الكلية الواقعة علي الشحنة Q_1 هي F_{21} و F_{31}تساوي $(0.54 + 0.09 = 0.63)$ N

في أتجاه a_{R21}.

القوي الكلية الواقعة علي الشحنة Q_3 هي F_{23}أو تساوي 0.09 في أتجاه a_{R23}.

لذن الشحنة Q2 هي الشحنة التي عليها أكبر القوي مقدارها و مقدار هذه القوي هو 0.63 N.

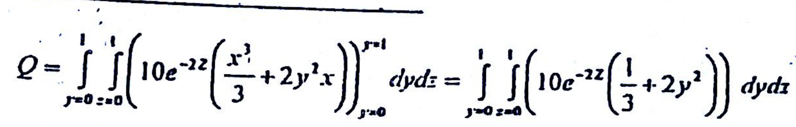
⑤ كثافة شحنة حجمية معطاه في الثمن (x , y , z موجبة) بالعلاقة:

$\rho = 10e^{-2z}(x^2 + 2y^2)\,c/m^3$ بينما $\rho = 0$ في اي مكان اخر أوجد الشحنة الكلية في المنطقة

$0 \le x \le 1 .... \& ... 0 \le y \le 1 .... \& .... -2 \le z \le 1$.

Solution:

$$Q = \int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\left(10e^{-2z}\left(x^2 + 2y^2\right)\right)dxdydz \quad \text{Where } dv = dxdydz$$



$$Q = \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\left(10e^{-2z}\left(\frac{x^3}{3} + 2y^2x\right)\right)_{x=0}^{x=1} dydz = \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\left(10e^{-2z}\left(\frac{1}{3} + 2y^2\right)\right) dydz$$

$$Q = \int_{z=0}^{1}\left(10e^{-2z}\left(\frac{1}{3}y + \frac{2y^3}{3}\right)\right)_{y=0}^{y=1} dz = \int_{z=0}^{1}\left(10e^{-2z}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\right)_{y=0}^{y=1} dz = \int_{z=0}^{1}\left(10e^{-2z}\right)$$

$$Q = \left(\frac{10e^{-2z}}{-2}\right)_{z=0}^{z=1} = -5\left(e^{-2} - 1\right) = 4.32C$$

⑥ تعطي كثافة حجمية لشحنة في الأحداثيات الأسطوانية بالعلاقة التالية:

$\rho_v = \left(\rho^2 - 10^{-4}\right)Z \sin 2\phi ... c/m^3$ حيث

$0 \le Z \le 0.04 ... \& .... 0 \le \phi \le \frac{1}{2\pi} ... \& ... 0.05 \le \rho \le 0.02$ بينما $0 = \rho_v$ في أي مكان اخر.

1- عين ρ_v (max). 2- أوجد الشحنة الكلية في المنطقة المحددة أعلاه.

Solution:

1- $$\rho_v(\max) = \left(\rho^2 - 10^{-4}\right)Z \sin 2\phi ... c/m^3\Big|_{Z=0.04,\ \rho=0.05,\ \phi=\frac{1}{2\pi}} = \left(0.05^2 - 10^{-4}\right)(0.04)\sin 2\left(\frac{1}{2\pi}\right) =$$

$$\rho_v(\max) = 12\mu c/m^3$$

2- $Q = \int_{vol} \rho_v dv$ Then $Q = \int_{\rho=0.01}^{0.03} \int_{z=0}^{0.04} \int_{\phi=0}^{\frac{1}{2\pi}} (\rho^2 - 10^{-4}) Z \sin 2\phi \rho d\rho d\phi dz$

$$Q = \int_{\rho=0.01}^{0.03} \int_{z=0}^{0.04} \int_{\phi=0}^{\frac{1}{2\pi}} (\rho^3 - 10^{-4} \rho) Z \sin 2\phi d\rho d\phi dz$$

Ans. $Q = 16.88$ pc

❼ مجال معطى بالعلاقة التالية: $E = 2xz^2\, a_x + 2z(x^2 + 1)\, a_z$ v/m أوجد معادلة خط الأسياب المار بالنقطة (1,3,-1).

Solution:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x}$$

$E_x = 2xz^2$, $E_z = 2z(x^2+1)$ so $\frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x} = \frac{2z(x^2+1)}{2xz^2} = \frac{(x^2+1)}{xz}$

$$zdz = \frac{(x^2+1)}{x} dx = \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \Rightarrow \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} x^2 + \ln(x) + \ln(c) = \frac{1}{2} x^2 + \ln(xc)$$

$$z^2 - x^2 = 2\ln(xc) \ldots at \ldots (1,3,-1) \Rightarrow 1^2 - 1^2 = 2\ln(c) \Rightarrow \ln(c) = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore z^2 - x^2 = 2\ln(x)$$

❽ بالنسبة لمجالات لا تتغير مع z في الأحداثيات الأسطوانية يمكن الحصول علي معادلات خط الأسياب بحل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{E_\rho}{E_\phi} = \frac{d\rho}{(\rho d\phi)}$

أوجد معادلة خط الأسياب المار بالنقطة $(2, 30^\circ, 0)$ خلال المجال المعطي بالعلاقة التالية:

$$E = \rho\cos(2\phi)_{a\rho} - \rho\sin(2\phi)_{a\phi}\, v/m$$

Solution:

$\frac{E_\rho}{E_\phi} = \frac{d\rho}{(\rho d\phi)}$ and $E_\rho = \rho\cos(2\phi) \ldots \& \ldots E_\phi = \rho\sin(2\phi)$

$$\frac{d\rho}{(\rho d\phi)}=\frac{\rho\cos2\phi}{-\rho\sin2\phi}\Rightarrow 2\frac{d\rho}{\rho}=-2\frac{\cos2\phi}{\sin2\phi}\Rightarrow 2\ln(\rho)=-\ln(\sin2\phi)+\ln(c)$$

$$\therefore \ln(\rho^2)+\ln(\sin2\phi)=\ln(c)\Rightarrow \ln(\rho^2\sin2\phi)=\ln(c)\Rightarrow \rho^2\sin2\phi=c$$

$$at...(2,30^\circ,0)\Rightarrow c=(2)^2\sin2(30)=2\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\therefore \rho^2\sin2\phi=2\sqrt{3}$$

كثافة التدفق الكهربي: Electrical Flux Density

الشكل التالي يبين كرة داخلية نصف قطرها (a) و أخري داخلية نصف قطرها (b). شحنة الكره الداخلية Q كولوم. تم تفريغ شحنة الكرة الخارجية بتوصيلها لحظيا بالأرض ووضع عازل بين الكرتين بحيث كانت الكرتان متحدتان في المركز. نلاحظ أن هنالك نوعا من الأزاحة من الكرة الداخلية الي الخارجية و التي لا تعتمد علي نوع الوسط العازل.

هذه الأزاحة أو تدفق الأزاحة يسمي بالتدفق الكهربي ونرمز له بالرمز ψ.

وجد فارداي ان شحنة الكرة Q تتناسب مع التدفق الكهربي ψ.

$$\psi \propto Q$$

$$\psi = KQ$$

K هو ثابت التناسب و وجد أنه يساوي الواحد اذن:

$$\psi = Q$$

و نجد ان التدفق الكهربي يقاس بالكولوم

Isolation

Spherical

Q

r=b

Q

r=a

ينتج عن سطح الكرة الداخلية ψ من التدفق الكهربي بواسطة الشحنة Q (ψ = Q) و موزع بأنتظام علي سطح مساحته $4\pi a^2$ m^2 . كثافة التدفق عند هذا السطح هي $\psi/4\pi a^2$ و تقاس كثافة التدفق الكهربي بالكولوم لكل متر مربع. و نرمز لها بالرمز D. اذن:

$$D=\frac{\psi}{4\pi r^2}=\frac{Q}{4\pi a^2}............C/m^2....................32$$

اتجاه D عند نقطة هو اتجاه خطوط التدفق الكهربي عند تلك النقطة

...ة الداخلية $D|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r$ و الكرة الخارجية $D|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} a_r$ و عند مساحة نصف قطرها r حيث أن $a \le r \le b$ نجد أن كثافة التدفق الكهربي تساوي: $D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$

اذا جعلنا الكرة الداخلية صغيره جدا مع استبقاء Q عند نفس القيمة فان Q تصبح في النهاية عبارة عن شحنة نقطية. و تكون كثافة الهربي هي نفس القيمة أي: $D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$

لكن نعلم أن شدة المجال الكهربي تعطي بالعلاقة $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} a_r$ اذن نلاحظ أن:

$$D = \varepsilon_0 E \qquad \text{.......33}$$

و لتوزيع حجمي عام لشحنات في فضاء حر حيث ان $Q = \int_{vol} \rho_v dv$ نجد أن:

$E = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2} a_R$ ومنها نجد أن كثافة التدفق الكهربي تساوي:

$$D = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} a_R \qquad \text{.......34}$$

Example:

اوجد كثافة التدفق الكهربي عند النقطة P(3,-4,5) في مجال شحنة نقطية مقدارها 0.2μc موضوعة عند نقطة الأصل.

Solution:

$$D = \frac{Q}{4\pi R^2} a_R \qquad a_R = \frac{3a_x - 4a_y + 5a_z}{\sqrt{9+16+25}} \qquad |R| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

$$D = \frac{0.2 \times 10^{-6}}{4\pi(\sqrt{50})^2}\left(\frac{3a_x - 4a_y + 5a_z}{\sqrt{9+16+25}}\right) = 318(0.424a_x - 0.566a_y + 0.707a_z) pc/m^2$$

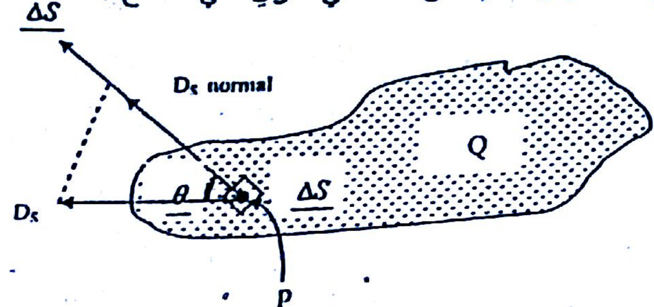
قانون جاوس: Gauss's Law

ينص قانون جاوس علي ان: التدفق الكهربي المار خلال اي سطح مغلق يساوي الشحنة الكلية المحتواه بذلك السطح.

الشكل التالي يوضح توزيعا لشحنة مبينة كمجموعة من الشحنات النقطية، محاطة بسطح مغلق. اذا كانت الشحنة الكلية Q كولوم فأن Q كولوم من التدفق الكهربي سوف يمر خلال

السطح المحتوي. وعند أي نقطة علي السطح سيكون لمتجه كثافة التدفق الكهربي D قيمة ما لتكن Ds (S دلالة علي أن D عند السطح).

Ds ستتغير في المقدار و الأتجاه من نقطة الي أخري علي السطح.



الشكل يوضح كثافة التدفق الكهربي Ds عند النقطة P نتيجة الشحنة Q و التدفق الكلي المار خلال السطح ΔS هو $D_S \Delta S$.

اذا أخذنا مساحة من السطح مقدارها ΔS عند النقطة P و Ds تصنع زاوية θ مع ΔS كما في الشكل أعلاه. التدفق الذي يعبر ΔS يساوي $\Delta\psi$ اذن:

$$\Delta\psi = D_{S_{norm}}.\Delta S = D_S \cos\theta \Delta S = \overline{D_S}.\Delta S = D_S.\Delta S$$
$$where...\overline{D_S} = D_S = D_S \cos\theta$$

التدفق الكلي ψ المار خلال السطح المغلق يحصل عليه كلاتي:

$$\psi = \int d\psi = \oint_{Closed_Surface} \overline{D_S} dS = \oint_{Closed_Surface} D_S dS........................35$$

التكامل مؤدي علي سطح مغلق و غالبا ما يسمي هذا السطح بسطح جاوس Gauss's Surface اذن الصورة الرياضية لقانون جاوس هي:

$$\psi = \oint_S \overline{D_S} dS = \oint_S D_S dS = Q....(Total...Charge...Inclosed)......................36$$

الشحنة المحصورة يمكن أن تكون عدة شحنات نقطية و في هذه الحالة: $Q = \sum Q$

أو خط شحنة وفي هذه الحالة:

$$Q = \int \rho_L .dL$$
$$dL = dx_{ax} + dy_{ay} + dz_{az}...or... = d\rho_{a\rho} + \rho d\phi_{a\phi} + dz_{az}...or... = dr_{ar} + r d\theta_{a\theta} + r\sin\theta d\phi_{a\phi}$$

أو شحنة سطحية وفي هذه الحالة:

$$Q = \int_s \rho_s . dS$$

$$dS = dydz_{ax}, dxdz_{ay}, dxdy_{az} ...or... = \rho d\phi dz_{a\rho}, d\rho dz_{a\phi}, \rho d\rho d\phi_{az}...$$

$$or... = r^2 \sin\theta d\theta d\phi_{ar}, r\sin\theta dr d\phi_{a\theta}, r dr d\theta_{a\phi}$$

او توزيع حجمي الشحنة وفي هذه الحالة:

$$Q = \int_{vol} \rho_v . dV$$

$$dV = dxdydz...or... = \rho d\rho d\phi dz.....or... = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

عموما تستخدم الصورة الأخيرة لكتابة قانون جاوس بدلالة توزيع الشحنة كالاتي:

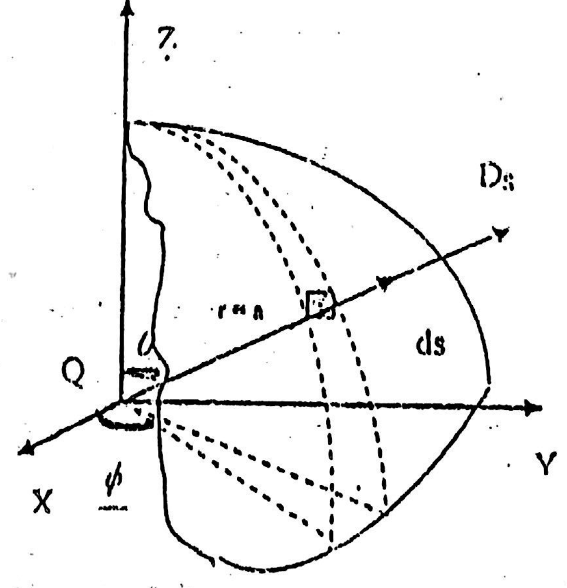
$$\oint_s D_s dS = \int_{vol} \rho dV ....37$$

المعادلة 37 تنص على أن التدفق الكهربي خلال أي سطح مغلق يساوي الشحنة الكلية المحصورة بذلك السطح.

Example:

اوجد التدفق الكهربي الناتج من شحنة Q موضوعة عند نقطة الأصل في نظام احداثيات كروي (اعتبر السطح كروي):

Solution:



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} a_r$$

$$D = \varepsilon_o E$$

$$\therefore D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

عند سطح الكرة r = a اذن:

$$D_s = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r$$

$$ds = r^2 \sin\theta d\phi d\theta_{ar} = a^2 \sin\theta d\phi d\theta_{ar}$$

$$D_s ds = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r . a^2 \sin\theta d\phi d\theta_{ar} = \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\phi d\theta$$

$$but.\psi = \oint_s D_s ds = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi = Q$$

اذن Q كولوم من التدفق الكهربي تعبر السطح حيث ان الشحنة الكليه المحصورة

كولوم.

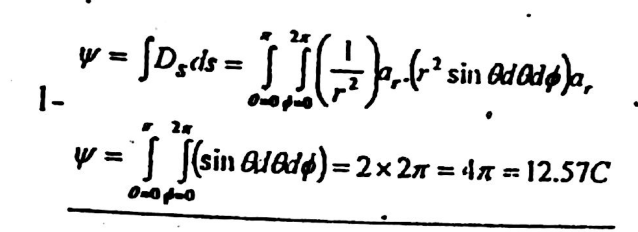
Example:

اوجد الشحنة الكلية المحصورة داخل الكرة r = 2 اذا كانت كثافة التدفق الكهربي معطاه بالمعادلات التالية:

$$1\text{-}\ \frac{1}{r^2}a_r\,c/m^2 \qquad 2\text{-}\ \frac{1}{r}a_r\,c/m^2 \qquad 3\text{-}\ \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)a_r+\left(\frac{\cos\theta(\ln(r))}{r}\right)a_\theta\,c/m^2$$

Solution:

$$ds=\left(r^2\sin\theta d\theta d\phi\right)$$



1-

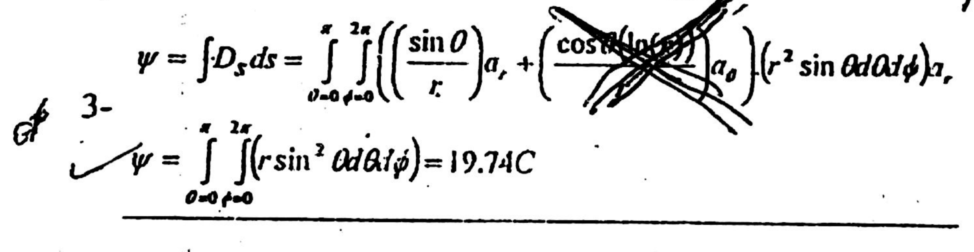
$$\psi=\int D_s ds=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{r^2}\right)a_r\cdot\left(r^2\sin\theta d\theta d\phi\right)a_r$$

$$\psi=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\sin\theta d\theta d\phi\right)=2\times2\pi=4\pi=12.57C$$

2-

$$\psi=\int D_s ds=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right)a_r\cdot\left(r^2\sin\theta d\theta d\phi\right)a_r$$

$$\psi=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(r\sin\theta d\theta d\phi\right)=2\times2\times2\pi=8\pi=25.1C$$



3-

$$\psi=\int D_s ds=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)a_r+\left(\frac{\cos\theta(\ln(r))}{r}\right)a_\theta\right)\cdot\left(r^2\sin\theta d\theta d\phi\right)a_r$$

$$\psi=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(r\sin^2\theta d\theta d\phi\right)=19.74C$$

تطبيقات قانون جـــــاوس: Gauss's Law Applications

بعض التوزيعات المتماثلة للشحنة:

Some of Symmetrical Distribution of Charge.

اذا كانت هنالك شحنة نقطية مقدارها Q كولوم موضوعة عند نقطة الأصل في نظام أحداثيات كروية (أي أن السطح كروي و مركز عند نقطة الأصل و له نصف قطر r) فان D_S لها نفسالقيمة عند كل نقطة علي السطح و هي عمودية في كل موضع علي السطح اذن:

$$Q = \oint_S D_s . ds = \oint_{S_{ph}} D_s . ds = D_s . \oint_{S_{ph}} ds$$

$$Q = \left\{ \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin^2 \theta d\theta d\phi \right\}; r = constant$$

$$Q = 4\pi r^2 D_s$$

r قد يكون لها أى قيمة و D_S موجهة نصف قطريا الخارج اذن:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r ....\&.......E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} a_r$$

وهي نفس النتيجة السابقة (قانون كثافة التدفق الكهربي).

Example:

الأسطح الكروية $r = 2, 4, 6$ m تحمل كثافات شحنات سطحية مقاديرها $D_S = 100, -30, 6$ $\mu c/m^2$ علي الترتيب. أوجد كثافة التدفق الكهربي عند انصاف الأقطار التالية:

1- r = 1 m. 2- r = 3 m. 3- r = 5 m. 4- r = 8 m.

Solution:

$$D_s = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r ....\&.......Q = 4\pi r^2 D_s$$

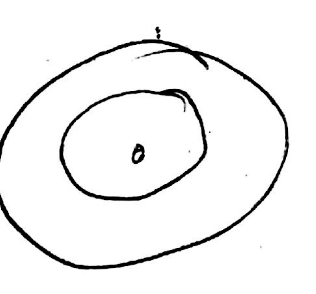
الشحنة الكلية المحتواه داخل انصاف الأقطار 6 ,4 ,2 هي Q_1, Q_2, Q_3 علي الترتيب و تساوي:

$$Q_{1(at\ r=2m)} = 4\pi r^2 D_S = 4\pi(2)^2(100) = 400\times 4\pi\ \mu c$$

$$Q_{2(at\ r=4m)} = 4\pi r^2 D_S = 4\pi(4)^2(-30) = -480\times 4\pi\ \mu c$$

$$Q_{3(at\ r=6m)} = 4\pi r^2 D_S = 4\pi(6)^2(6) = 216\times 4\pi\ \mu c$$

و تكون قيمة كثافة التدفق الكهربي D عند الأسطح 1, 3, 5, 8 m هي:



1- At r = 1 m $D_s = \frac{Q_{(in....r=1)}}{4\pi r^2} = \frac{0}{4\pi(1)^2} = 0 \mu c/m$

2- At r = 3 m $D_s = \frac{Q_{(in....r=3)}}{4\pi r^2} = \frac{Q_1}{4\pi r^2} = \frac{400\times 4\pi}{4\pi(3)^2} = 44.4 \mu c/m$

3- At r = 5 m $D_s = \frac{Q_{(in....r=5)}}{4\pi r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r^2} = \frac{(400\times 4\pi - 480\times 4\pi)}{4\pi(5)^2} = -3.2 \mu c/m$

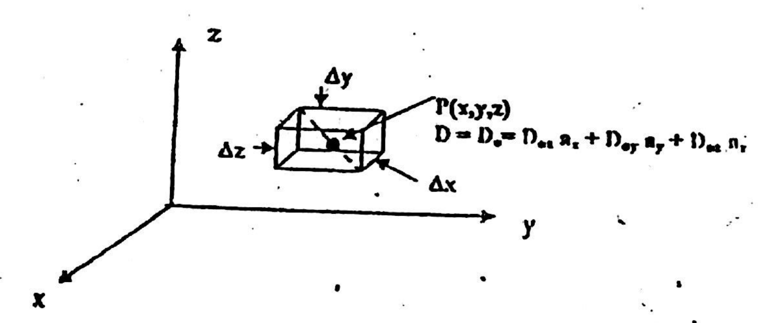
4- At r = 8 m

$$D_r = \frac{Q_{(at_r=8)}}{4\pi r^2} = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{4\pi r^2} = \frac{(400\times4\pi - 480\times4\pi + 216\times4\pi)}{4\pi(8)^2} = 2.125\mu c/m$$

تطبيقات قانون جـــــاوس: Gauss's Law Applications

عنصر حجم تفاضلي: Differential Volume Element

عند تطبيق قانون جاوس علي سطح غير متماثل نختار سطحا مغلقـا صغيرا بحيث تكون D ثابتة تقريبا علي السطح و تكون النتيجة أكثر دقة كلما نقص الحجم المحصور داخل السطح الجاوسي الي أن يزول في النهاية الي الصفر.



النقطة P المبينة في الشكل أعلاة معينة بنظام أحداثيات كارتيزي. و قيمة D عند هذه النقطة يمكن أن نعبر عنها في المركبات الكارتيزية بالعلاقة التالية:

$$D_0 = D_{x0}\, a_x + D_{y0}\, a_y + D_{z0}\, a_z$$

و السطح المغلق عبارة عن صندوق ممركز عند النقطة P وله الأضلاع التي أطوالها:

.(z) Δy, Δx, Δ

و بتطبيق قانون جاوس : $\oint_S D.ds = Q$

$$\oint_S D.ds = \int_{Front} + \int_{Back} + \int_{Left} + \int_{Right} + \int_{Top} + \int_{Bottom}$$

$$\int_{Front} = D_{Front}.\Delta S_{Front} = D_{Front}.\Delta y\Delta z_{ax} = D_{x,Front}.\Delta y\Delta z$$

$D_{x,Front}$ تعني أن تقترب D_x من وجة المقدمة الذي يبعد $(\Delta x)/2$ من النقطة P و لذلك :

$$\int_{x,Front} = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\times Rate...of...Change...of D_x...with...x$$

Scanned by CamScanner

$$\int_{x,Front} = D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

D_x تتغير مع x, y, z بصورة عامة.

$$\int_{Front} = \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z \ldots\ldots 1$$

و التكامل علي الوجة الخلفي يكون علي النحو التالي:

$$\int_{Back} = D_{Back}.\Delta S_{Back} = D_{Back}.(-\Delta y \Delta z)_{ax} = -D_{x,Back}.\Delta y \Delta z$$

$$\int_{x,Back} = D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}$$

$$\int_{Back} = -\left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z = \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z \ldots\ldots 2$$

اذن نتيجة التكامل علي الوجة الأمامي و الخلفي هي:

$$\int_{Front} + \int_{Back} = \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z + \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\right)\Delta y \Delta z = \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \ldots\ldots 3$$

و بنفس الطريقة يمكن اثبات ان:

$$\int_{Right} + \int_{Left} = \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \ldots\ldots 4$$

$$\int_{Top} + \int_{Bottom} = \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z \ldots\ldots 5$$

و تصبح نتيجة التكامل الكلية (علي الست أوجة) هي:

$$\oint_s D.ds = \frac{\partial D_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial D_z}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\oint_s D.ds = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \ldots\ldots But \ldots \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta v$$

$$\therefore \oint_s D.ds = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v = Q$$

اذن الشحنة الكلية المحتواه في الحجم Δv تساوي $\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v$.

Example:

اوجد الشحنة المحصورة في الحجم الصغير و الذي مقدارة $10^{-9}\ m^3$ اذا كانت كثافة التدفق الكهربي تعطي بالعلاقة التالية:

$$D = e^{-x}\sin(y)\,a_x - e^{-x}\cos(y)\,a_y + 2z\,a_z \ \ c/m^2$$

Solution:

$$Q = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v$$

$$D_x = e^{-x}\sin(y) \quad \& \quad D_y = -e^{-x}\cos(y) \quad \& \quad D_z = 2z$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x}\sin y \quad , \quad \frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x}\sin y \quad \text{and} \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

$$Q = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v = \left(-e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + 2\right)\times 10^{-9}$$

$$Q = 2\times 10^{-9} = 2nc$$



الأنفـــــــراج: Divergence

اذا أعتبرنا للحجم Δv صغيرا جدا بحيث أنه يؤول الي الصفر اذن:

$$\oint_s D.ds = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v = Q$$

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \oint_s \frac{D.ds}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

بأخذ النهاية للطرفين:

$$\lim_{\Delta v\to 0}\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v\to 0}\oint_s \frac{D.ds}{\Delta v} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{Q}{\Delta v}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v\to 0}\oint_s \frac{D.ds}{\Delta v} = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{Q}{\Delta v}$$

كثافة الشحنة الحجمية ρ هي: $\lim_{\Delta v\to 0}\frac{Q}{\Delta v} = \rho_v\, c/m^3$ اذن:



$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\lim_{\Delta v\to 0}\oint_s\frac{D.ds}{\Delta v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{Q}{\Delta v}=\rho_v$$

اذا كان A يمثل اى متجة (سرعة او تدرج حرارة او قوة او اي متجة اخر)

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\lim_{\Delta v\to 0}\oint_s\frac{A.ds}{\Delta v}\ldots\ldots\ldots\ldots*$$

توضح العلاقة الاخيرة * انفراج المتجة A . اذن يعرف انفراج المتجة A بانه:

$$\text{Divergence of } A=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\lim_{\Delta v\to 0}\oint_s\frac{A.ds}{\Delta v} \text{ or:}$$

$$\text{div } A=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

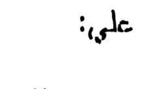
بمعني ان انفراج متجة كثافة التدفق الكهربي A هو الانسياب الخارجي للتدفق من سطح مغلق صغير لكل وحدة الحجوم عندما يتقلص الحجم الى الصفر.

بتطبيق تعريف الانفراج علي عنصر عنصر حجم تفاضلي في الاحداثيات الكارتيزية نحصل علي:

$$\text{div } D=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \text{ in Cartesian coordinate}$$

اما اذا اختيرت وحدة حجم تفاضلية ρdρdφdz في الاحداثيات الاسطوانية فاننا نحصل علي:

$$\text{div } D=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \text{ in Cylindrical Coordinate}$$



اما اذا اختيرت وحدة حجم تفاضلية $r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$ في الاحداثيات الكروية فاننا نحصل علي:

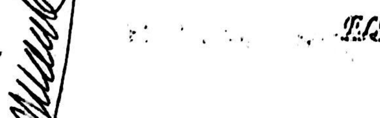
$$\text{div } D=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2D_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} \text{ in Spherical Coordinate}$$

Example:

اوجد انفراج المجال D عند النقطة $p\,(2, 30^\circ, 90^\circ)$ حيث ان المجال D معبر عنه بالعلاقة التالية: $D=(2r\sin\theta\cos\phi+\cos\theta)_{a_r}+(r\cos\theta\cos\phi-\sin\theta)_{a_\theta}-(r\sin\phi)_{a_\phi}$.

Solution:

$$div(D)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2D_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$



$D_r = (2r\sin\theta\cos\phi + \cos\theta) \ldots \& \ldots D_\theta = (r\cos\theta\cos\phi - \sin\theta) \ldots \& \ldots D_\phi = (r\sin\phi)$

$r^2 D_r = 2r^3\sin\theta\cos\phi + r^2\cos\theta$

$$\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} = 6r^2\sin\theta\cos\phi + 2r\cos\theta$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} = 6\sin\theta\cos\phi + \frac{2}{r}\cos\theta \ldots\ldots 1$$

$$\sin\theta(D_\theta) = r\sin\theta\cos\theta\cos\phi - \sin^2\theta = \frac{2}{2}r\sin\theta\cos\theta\cos\phi - \sin^2\theta = \frac{r}{2}\sin 2\theta\cos\phi - \sin$$

$$\frac{\partial(\sin\theta(D_\theta))}{\partial\theta} = \frac{r}{2}2\cos 2\theta\cos\phi - 2\sin\theta\cos\theta = r\cos 2\theta\cos\phi - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta(D_\theta))}{\partial\theta} = \frac{r\cos 2\theta\cos\phi - 2\sin\theta\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{\cos 2\theta\cos\phi}{\sin\theta} - \frac{2}{r}\cos\theta \ldots\ldots 2$$

$$D_\phi = -(r\sin\phi) \ldots \& \ldots \frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} = -r\cos\phi$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} = \frac{-r\cos\phi}{r\sin\theta} = -\frac{\cos\phi}{\sin\theta} \ldots\ldots 3$$

$$\text{div } D = \text{eq.}(1) + \text{eq.}(2) + \text{eq.}(3)$$

$$divD = 6\sin\theta\cos\phi + \frac{2}{r}\cos\theta + \frac{\cos 2\theta\cos\phi}{\sin\theta} - \frac{2}{r}\cos\theta - \frac{\cos\phi}{\sin\theta}$$

$At \ldots P(2, 30^\circ, 90^\circ) \Rightarrow r = 2 \;\&\; \theta = 30^\circ \;\&\; \phi = 90^\circ$

$$divD = 6\sin 30^\circ\cos 90^\circ + \frac{2}{r}\cos 30^\circ + \frac{\cos(2\times 30^\circ)\cos 90^\circ}{\sin 30^\circ} - \frac{2}{r}\cos 30^\circ - \frac{\cos 90^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$divD = 0 + \frac{2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{2}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = Zero$$

First Maxwell's Equation: معادلة ماكسويل الأولى (الكهروستاتيكية)

$$divD = \lim_{\Delta v \to 0} \oint_s \frac{D.ds}{\Delta v}$$

نعلم أن:

$$divD = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \ldots\ldots \& \ldots\ldots divD = \rho$$

و من قانون جاوس نجد أن : $\oint_s D.ds = Q$ و لكل وحدة حجوم $\oint_s \frac{D.ds}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$ و بتقليص هذا

الحجم الي الصفر نجد أن: $\lim_{\Delta v \to 0} \oint_s \frac{D.ds}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v}$ لكن $\lim_{\Delta v \to 0} \oint_s \frac{D.ds}{\Delta v} = divD$ و

تفاضل ماكسويل
$div D = \rho$

إذن: $\lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho$ وهي أولى معادلات ماكسويل الأربعة $div D = \rho$ ....**

و تطرق علي الكهروستاتيكية و المجالات المغنطيسية الثابتة و هي تنص علي أن التدفق الكهربي لكل وحدة حجوم المار خلال وحدة حجمية متناهية في الصغر (الطرف الأيسر للمعادلة*) يساوي الشحنة الحجمية المحتواه في ذلك الحجم (الطرف الأيمن للمعادلة*).

Example:

أوجد تعبيرا لكثافة الشحنة الحجمية التي تتسبب في إيجاد المجالات التالية:

1- $D = e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} (2_{nx} - 2.5_{ny} - _{nz})\ c/m^2$

2- $D = e^{-2z} (2\rho\varphi_{n\rho} + \rho_{n\varphi} - 2\rho^2\varphi_{nz})\ c/m^2$

3- $D = 2r\sin\theta\sin\phi_{nr} + \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta\sin\phi_{n\theta} + \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\phi_{n\phi}\ c/m^2$

Solution:

$$\rho_v = div\ D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

1- $D_x = 2e^{4x} e^{-5y} e^{-2z}$ & $D_y = -2.5 e^{4x} e^{-5y} e^{-2z}$ & $D_z = -e^{4x} e^{-5y} e^{-2z}$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = 8e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} \ldots \& \ldots \frac{\partial D_y}{\partial y} = 12.5e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} \ldots \& \ldots \frac{\partial D_z}{\partial z} = 2e^{4x} e^{-5y} e^{-2z}$$

$$\rho = divD = 8e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} + 12.5e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} + 2e^{4x} e^{-5y} e^{-2z} = 22.5e^{4x} e^{-5y} e^{-2z}$$

$$2\text{-}\ \rho_v = div\ D = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial\left(\rho\left(2\rho\phi e^{-2z}\right)\right)}{\partial \rho} = 4\rho\phi e^{-2z}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} = 4\phi e^{-2z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho e^{-2z}\right)}{\partial \phi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(-2\rho^2\phi e^{-2z}\right)}{\partial z} = 4\rho^2\phi e^{-2z} \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$\rho_v = div\ D = eq.1 + eq.2 + eq.3 = 4\phi e^{-2z} + 0 + 4\rho^2\phi e^{-2z} = 4\phi e^{-2z}\left(1 + \rho^2\right) c/m^3$$

3- $\rho_v = \text{div}\, D = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2(2r\sin\theta\sin\phi))}{\partial r} = \frac{1}{r^2}6r^2\sin\theta\sin\phi = 6\sin\theta\sin\phi \ldots 1$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\sin\phi\right)}{\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{1}{2}2\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos 2\theta\sin\phi$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos 2\theta\sin\phi \ldots\ldots 2$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\phi\right)}{\partial\phi} = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\phi \ldots\ldots 3$$

$$\rho_v = \text{div}\, D = \text{eq.}1 + \text{eq.}2 + \text{eq.}3$$

$$\rho = divD = \frac{1}{r^2}6r^2\sin\theta\sin\phi = 6\sin\theta\sin\phi + \frac{1}{r\sin\theta}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos 2\theta\sin\phi - \frac{1}{r\sin\theta}\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\phi$$

$$\rho = \sin\theta\sin\phi\left(6-\frac{2}{r}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right) = \sin\theta\sin\phi\left(6-\left(2+\frac{2}{r^2}\right)\right) = 2\sin\theta\sin\phi\left(2-\frac{1}{r^2}\right)c/m^3$$

العامل المتجـــه ∇ و نظرية الأنفراج:

Del Operator and the Divergence Theorem

يعرف العامل دل (∇) del operator كعامل متجة حيث أن:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z$$

أذا كانت $D = D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z$ عندما يكون $\nabla . D$ يساوي:

$$\nabla . D = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)a_x + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)a_y + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)a_z\right)\left(D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z\right)$$

$$\nabla . D = \frac{\partial}{\partial x}(D_x) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = divD$$

$$\therefore divD = \nabla . D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$



اذا كانت u أي كمية قياسية فان دل u يكون كالاتي:

$$\nabla.u=\left(\frac{\partial}{\partial x}a_x+\frac{\partial}{\partial y}a_y+\frac{\partial}{\partial z}a_z\right)u=\frac{\partial u}{\partial x}a_x+\frac{\partial u}{\partial y}a_y+\frac{\partial u}{\partial z}a_z$$

في الأحداثيات الأسطوانية فان $\nabla.D$ ايضا تدل علي أنفراج D أي أن:

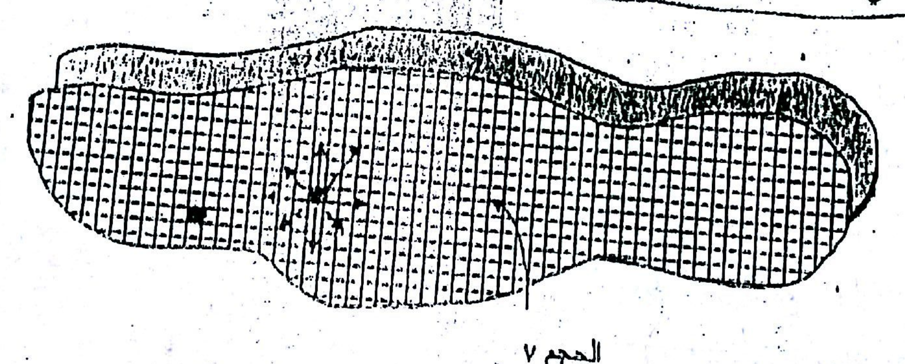
$$\nabla.D=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial D_z}{\partial z}$$

و كذلك في الأحداثيات الكروية فان $\nabla.D$ ايضا تدل علي انفراج D اي أن:

$$\nabla.D=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2D_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

نظرية الأنفراج: The Divergence Theorem

تنص نظرية الأنفراج علي ان التدفق الكلي العابر السطح المغلق يساوي انفراج تكامل انفراج كثافة التدفق في كل نقطة من نقاط الحجم المحصور.



الحجم v

من قانون جاوس: $\oint_S D.ds=Q$. و كذلك $Q=\int_{vol}\rho_v.dv$ و لكننا نعلم ان $divD=\nabla.D=\rho$

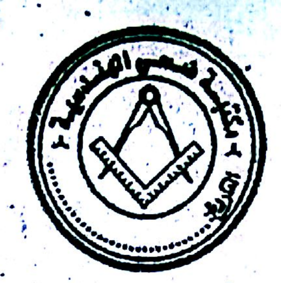
اذن يمكن كتابة ***: $\oint_S D.ds=Q=\int_{vol}\rho_v.dv=\int_{vol}(\nabla.D)dv$ ....***

الطرف الأيمن من المعادلة *** يمثل تكامل أنفراج كثافة التدفق في كل نقطة من نقاط الحجم، بينما الطرف الأيسر يعبر عن التدفق الكلي العابر السطح، اي ان الحدان الأول و الأخير في المعادلة *** اعلاه يكونان نظرية الأنفراج اذن:

$$\boxed{\oint_S D.ds=\int_{vol}(\nabla.D)dv}$$

Example1:

يحتوي السطح المستوي $z = 0.5$ في المنطقة $0 \le x \le 1 , 0 \le y \le 2$ على كثافة شحنة سطحية مقدارها $2x^2 + 5y$ c/m2 و ليس هنالك شحنة في أي مكان آخر. كم هو مقدار التدفق الكهربي الذي يترك المنطقة المكعبة $|x| , |z| , |y| \ge 0$.



Solution:

$$\psi = \oint_s D.ds = Q$$

$D_s = 2x^2 + 5y$ and $ds = dxdy$ because z is constant so

$$\psi = Q = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}(2x^2 + 5y)dxdy = \int_{y=0}^{2}\left(\frac{2}{3}x^3 + 5yx\right)\Big|_{x=0}^{1} dy = \int_{y=0}^{2}\left(\frac{2}{3} + 5y\right)dy$$

$$\psi = Q = \left(\frac{2}{3}y + \frac{5}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{2} = \left(\frac{2}{3}\times 2 + \frac{5}{2}\times 2^2\right) = 11.33C$$

Example2:

إذا كانت D تعطى بالعلاقة التالية $D = 20xy^3z^4\,a_x + 30x^2y^2z^4\,a_y + 40x^2y^3z^3\,a_z$ c/m2

ما هو مقدار الشحنة المحتواه في الحجم 10^{-10} m^3 الموجود عند النقطة (3,1,2).

Solution:

$$Q = \iiint divD.dv = \oint_s D.ds = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta v$$

$$Dx = 20xy^3z^4 \;\&\; D_y = 30x^2y^2z^4 \;\&\; D_z = 40x^2y^3z^3$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = 20y^3z^4 \;\&\; \frac{\partial D_y}{\partial y} = 60x^2yz^4 \;\&\; \frac{\partial D_z}{\partial z} = 120x^2y^3z^2$$

$$\therefore Q = \left(20y^3z^4 + 60x^2yz^4 + 120x^2y^3z^2\right)\times 10^{-10}{}_{At(x=3\&y=1\&z=2)} = 1.328\mu c$$

Example3:

أحسب انفراج كل من المجالات التالية عند النقطة P(1,-1,2)

1- $D = xze^{2y}(z_{ax} + xz_{ay} + x_{az})$

2- $D = (x_{ax} + y_{ay} + z_{az}) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Example4:

كثافة التدفق الكهربي داخل الحيز الأسطواني $\rho \le 5\ m$ معطاه بالعلاقة التالية:

$$D = 4\rho^2\ a_\rho\ c/m^2$$

أ. ماهي كثافة الشحنة الحجمية عند $\rho = 2$.

ب. ماهي كثافة التدفق الكهربي عند $\rho = 2$.

Solution:

$$\rho_v = divD = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$1\text{- } D_\rho = 4\rho^2 \ \&\ D_\phi = 0 \ \&\ D_z = 0 \ldots so \ldots \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(4\rho^3)}{\partial \rho}$$

$$\therefore \rho_v = divD = \frac{1}{\rho}4\times 3\times \rho^2 = 12\rho|_{\rho=2} = 12\times 2 = 24c/m^3$$

$$2\text{- } D = 4\rho^2\ a_\rho\ c/m^2 \text{ at } \rho = 2 \rightarrow D = 4(2)^2\ a_\rho\ c/m^2 = 16\ a_\rho\ c/m^2$$

الطاقة و الجهد: Voltage and Energy

الطاقة المستنفدة في تحريك شحنة نقطية في مجال كهربي:

يعبر شدة المجال الكهربي عن مقدار القوة الواقعة علي وحدة شحنة أختبار. فعند تحريك شحنة الأختبار هذه ضد المجال الكهربي يجب التأثير بقوة مساوية و مضادة لتلك القوة المبذولة بواسطة المجال، اي بذك طاقة او بذل شغل معين (اي بذل جهد).

أذن لتحريك شحنة Q مسافة dL في مجال كهربي E ،اولا تكون القوة الواقعة علي الشحنة Q بسبب المجال الكهربيE هي:

$$F_E = QE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

F_E دلالة علي أن هذه القوة بسبب المجال الكهربي E.

مركبة هذه القوة في أتجاه dL هي F_{EL} أذن:

$$F_{EL} = F_E\ a_L = Q.E\ a_L$$

a_L هي وحدة المتجه في أتجاه dL.

القوة التي يجب أن تسلط تساوي في المقدار و تضاد في الأتجاه القوة نتيجة المجال الكهربي E أي أن:

$$F_{appl} = -QE\ a_L$$

و الطاقة تمثل حاصل ضرب القوة في المسافة. أذن الشغل التفاضلي المبذول بالمصدر الخارجي المحرك ل Q هو:

$$dw = -Q.E\ a_L.\ dL = -Q.E.dL\ a_L$$

$$dw = -Q.E.dL \quad \text{.......................}2$$

- هنالك تناظر بين المجال الكهربي و مجال الجاذبية الأرضية.

أما الشغل التفاضلي المطلوب لتحريك الشحنة Q مسافة محددة يحسب من التكامل الأتي:

$$w = -Q\int_{Initial}^{Final} E.dL \quad \text{.......................}3$$

Example:

أوجد الشغل المبذول لنقل شحنة مقدارها 2 c من النقطة B(1,0,1) الي النقطة A(0.9,0.5,1) علي طول الخط المستقيم الواصل بين A و B في المجال الكهربي المعطي بالعلاقة: $E = y\ a_x + x\ a_y + 2\ a_z$ v/m.

Solution:

$$w = -Q\int_{Initial}^{Final} E.dL$$

في الأحداثيات الكارتيزية $dl = dx\ a_x + dy\ a_y + dz\ a_z$

في الأحداثيات الأسطوانية: $dl = d\rho\, a_\rho + \rho d\phi\, a_\phi + dz\, a_z$

في الأحداثيات الكروية $dl = dr\, a_r + r d\theta\, a_\theta + r\sin\theta d\phi\, a_\phi$

$$w = -2\int_{Initial}^{Final} (y_{ax} + x_{ay} + 2_{az})(dx_{ax} + dy_{ay} + dz_{az}) = -2\int_{Initial}^{Final} (ydx + xdy + 2dz)$$

المسار بين A و B هو الخط المستقيم المباشر



$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$y - 0 = \frac{0.5 - 0}{0.9 - 1}(x - 1) \Rightarrow y = -5x + 5 \ldots and \ldots x = 1 - \frac{1}{5}y$$

$$W = -2\left[\int_{x=1}^{0.9}(-5x + 5)dx + \int_{y=0}^{0.5}\left(1 - \frac{1}{5}y\right)dy + \int_{z=1}^{0.91}2dz\right]$$

$$W = -2\left[\left(\frac{-5}{2}x^2 + 5x\right)\Big|_{x=1}^{0.9} + \left(y - \frac{1}{10}y^2\right)\Big|_{y=0}^{0.90.5} + (2z)\Big|_{z=1}^{1}\right]$$

$$W = -2[2.475 - 2.5 + 4.75] = -9.45J$$

اذا تغير المسار حيث أصبح من B الي C الي A او لأي مسار اخر فان الشغل المبذول يظل كما هو اي لا تعتمد قيمة الشغل المبذول علي المسار.

Example:

اثبت ان نفس الشغل يبذل في تحريك شحنة نقطية مقدارها 10 C – من نقطة الأصل الي النقطة (1,2,3) خلال المجال $E = 6x^2y\,a_x + 2x^3\,a_y + 6z\,a_z$ v/m علي طول المسارات التالية:

1- اجزاء خطية مستقيمة (0,0,0) الي (1,0,0) الي (1,2,0) الي (1,2,3).

2- الخط المستقيم $y = 2x$, $z = 3x$.

3- المنحني $y = 2x$, $z = 3x^4$

Solution:

1- المسار (0,0,0) الي (1,0,0) الي (1,2,0) الي (1,2,3) .

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$y-0=\frac{2-0}{1-0}(x-0)\ldots\&\ldots z-0=\frac{3-0}{1-0}(y-0)$$

$$y=2x\ldots\ldots\&\ldots z=\frac{3}{2}y$$

$$w=-Q\int_{Initial}^{Final}E.dL$$

$$w=-Q\left[\int_{Initial}^{Final}\left(6x^2y\,dx+2x^3dy+6zdz\right)\right]=-Q\left[\int_{Initial}^{Final}\left(6x^2(2x)dx+2\left(\frac{1}{2}y\right)^3dy+6zdz\right)\right]$$

$$w=-Q\left[\int_{Initial}^{Final}\left(12x^3dx+\frac{1}{4}y^3dy+6zdz\right)\right]$$

$$w=10\left(3x^4+\frac{1}{16}y^4+3z^2\right)\Bigg|_{0,0,0}^{1,0,0}\Bigg|_{1,0,0}^{1,2,0}\Bigg|_{1,2,0}^{1,2,3}$$

$$w_1=10\left(3x^4+\frac{1}{16}y^4+3z^2\right)\Bigg|_{0,0,0}^{1,0,0}.\&.w_2=10\left(3x^4+\frac{1}{16}y^4+3z^2\right)\Bigg|_{1,0,0}^{1,2,0}.\&.w_3=10\left(3x^4+\frac{1}{16}y^4+3z^2\right)\Bigg|_{1,2,0}^{1,2,3}$$

$$w_1=30j\ldots\ldots\&\ldots w_2=10j\ldots\&\ldots w_3=270j$$

$$W_T=w_1+w_2+w_3=30+10+270=310J$$

2- and 3- Home Work.

تعريف الجهد و فرق الجهد:

Electrical Potential and Potential Difference

يعرف فرق الجهد v بأنه الشغل المبذول بمنبع خارجي في تحريك وحده شحنة موجبة من نقطة الي أخري في مجال كهربائي.

$$w=-Q\int_{Initial}^{Final}E.dL \quad \text{But} \quad Q=1 \quad \text{thus:}$$

$$v=-\int_{Initial}^{Final}E.dL \;\; \text{J/C} = \text{volt}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

فرق الجهد بين النقطتين A و B يساوى:

$$v_{AB}=-\int_{B}^{A}E.dL$$

B هي النقطة الأبتدائية و A هي النقطة النهائية.

اذا كان الجهد عند النقطة A هو v_A و عند النقطة B هو v_B فان:

$$v_{AB} = v_A - v_B \qquad ....5$$

Example:

اذا كان المجال الكهربي E معطي بالعلاقة:

$E = 40xy\, a_x + 20x^2\, a_y + 2\, a_z$ v/m احسب:

1- v_{PQ} اذا كانت النقطة p هي $P(1,-1,0)$ و Q هي $Q(2,1,3)$.

2- v عند $p(1,-1,0)$ اذا كان المرجع الصفري عند $Q(2,1,3)$.

3- v عند $P(1,-1,0)$ اذا كان المرجع الصفري عند نقطة الأصل.

Solution:

$$1- \; y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \;\&\; z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$y - 1 = \frac{-1-1}{1-2}(x-2) \Rightarrow y = 2x - 3 ... \& ... x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

$$z - 3 = \frac{0-3}{-1-1}(y-1) \Rightarrow z - 3 = \frac{3}{2}(y-1) ... no..need..this...equation$$

$$v_{PQ} = -\int_Q^P E.dL$$

$$v_{PQ} = -\int_Q^P 40xy dx + 20x^2 dy + 2dz$$

$$v_{PQ} = -\int_Q^P 40x(2x-3)dx + 20\frac{(y+3)^2}{4}dy + 2dz$$

$$v_{PQ} = -\int_Q^P (80x^2 - 120x)dx + (5y^2 + 30y + 45)dy + 2dz$$

$$v_{PQ} = -\left[\left(\frac{80}{3}x^3 - 60x^2\right) + \left(\frac{5}{3}y^3 + 15y^2 + 45y\right) + (2z)\right]_{Q(2,1,3)}^{P(1,-1,0)}$$

$$v_{PQ} = -\left[\left(\frac{80}{3} - 60 - \frac{5}{3} + 15 - 45\right) - \left(\frac{640}{3} - 240 + \frac{5}{3} + 15\right) + 45 + 6\right] = 106v$$

2- H.W ans. 106 v.

3- H.W ans. 20 v.



تدرج الجهد: Potential Gradient

الهدف هو إيجاد شدة المجال الكهربي E من الجهد v. و من العلاقة $v = -\int E dL$

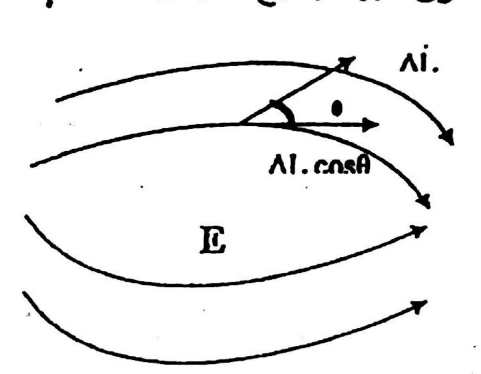
وبتطبيق هذه المعادلة علي عنصر قصير جدا طوله dL الذي فيه E ثابتة مما يؤدي

الي تزايد فرق الجهد ليصبح Δv أذن:

$$\Delta v = -E\,\Delta L$$

$$\Delta v = -E\,\Delta L\cos\theta$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta L} = -E\cos\theta$$



باخذ النهايات نجد أن:

$$\lim_{\Delta v \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta L} = \lim_{\Delta v \to 0} -E\cos\theta \Rightarrow \frac{dv}{dL} = -E\cos\theta \ldots and \ldots \left.\frac{dv}{dL}\right|_{Max} = -E$$

و بفرض أن a_N وحده متجه عمودي علي السطح المتساوي الجهد يمكن عندها التعبير عن شدة المجال الكهربي بدلالة الجهد كالاتي:

$$E = -\left.\frac{dv}{dL}\right|_{Max} a_N \ldots\ldots 5$$

أي أن مقدار E معطي بأقصي معدل تغير فراغي ل v . و إتجاه E عمودى علي السطح متساوي الجهد، و في إتجاه تناقص الجهد. أذن نفرض أن:

$$\left.\frac{dv}{dL}\right|_{Max} = \frac{dv}{dN}$$

$\left.\frac{dv}{dL}\right|_{Max}$ دلالة علي أن $\left.\frac{dv}{dL}\right|_{Max}$ يحدث عندما تكون ΔL في إتجاه a_N.

العملية علي v التي تحصل بها علي E تسمي بالتدرج Gradient. وتدرج مجال قياسى T يُطي كالاتي:

$$\text{Gradient of } T = \text{grad } T = dT/dN\ a_N \ldots\ldots 6$$

a_N وحده متجه عمودي علي السطح المتساوى الجهد أذن:

$$E = -\text{grad } v \ldots\ldots 7$$

Scanned by CamScanner

كذلك لدينا:

$$dv = -E.dL = -E_x dx - E_y dy + E_z dz \quad ....2$$

اذن من المعادلتين 1 و 2 اعلاه نجد ان:

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \; \& \; E_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \; , \; E_z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

و كذلك نعلم ان: اذن: $E = E_x\, a_x + E_y\, a_y + E_z\, a_z$

$$E = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}a_x + \frac{\partial v}{\partial y}a_y + \frac{\partial v}{\partial z}a_z\right) \quad ....3$$

كذلك لدينا:

$$grad\,v = -E = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}a_x + \frac{\partial v}{\partial y}a_y + \frac{\partial v}{\partial z}a_z\right) \quad ....4$$

العامل الأتجاهي ∇ يساوي:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z \; ....and$$

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}a_x + \frac{\partial T}{\partial y}a_y + \frac{\partial T}{\partial z}a_z$$

اذن $\nabla T = grad\, T$ اي ان: $E = -\nabla v$

يمكن التعبير عن التدرج في الأحداثيات الكارتيزية على النحو التالي:

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}a_x + \frac{\partial v}{\partial y}a_y + \frac{\partial v}{\partial z}a_z \quad ....5$$

يمكن التعبير عن التدرج في الأحداثيات الأسطوانية على النحو التالي:

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial \rho}a_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \phi}a_\phi + \frac{\partial v}{\partial z}a_z \quad ....6$$

يمكن التعبير عن التدرج في الأحداثيات الكروية على النحو التالي:

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial r}a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}a_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \phi}a_\phi \quad ....7$$

إذا كان مجال الجهد V في فضاء حر يعطي بالعلاقة التالية:

$V = 50x^2yz + 20y^2$ volt أوجد:

1- v عند النقطة $p(1,2,3)$. 2- E_p. 3- $\frac{dv}{dN}$ عند النقطة $P(1,2,3)$.

Solution:

$$1\text{-}V_{at\ p(1,2,3)} = 50(1)^2(2)(3) + 20(2)^2 = 380 \text{ volt}$$

$$2\text{-}\quad E = -\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}a_x + \frac{\partial v}{\partial y}a_y + \frac{\partial v}{\partial z}a_z$$

$$E = -(100xyz)a_x - (50x^2z + 40y)a_y - (50x^2y)a_z$$

$$E_{at\ p(1,2,3)} = -(100\times1\times2\times3)a_x - (50\times1^2\times3 + 40\pm\times2)a_y - (50\times1^2\times2)a_z$$

$$= -600a_x - 230a_y - 100a_z .....v/m$$

$$3\text{-}\quad \frac{dv}{dN}\Big|_{at\ p} = \frac{dv}{dL}\Big|_{Max} = |E| =$$

$$\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{(-600)^2 + (-230)^2 + (-100)^2} = 650 v/m$$



Poisson's and Laplace's Equations : معادلتا بواسون و لابلاس

من قانون جاوس $\nabla.D = \rho$ و من المعادلات $D = \varepsilon E$ و $E = -\nabla v$ يكون لدينا

$$\nabla.D = \nabla.(\varepsilon E) = \nabla.(-\varepsilon\nabla.v) = -\nabla.(\varepsilon\nabla.v) = -\varepsilon\nabla.(\nabla.v) = \rho$$

$$\nabla.(\nabla.v) = -\frac{\rho}{\varepsilon} .... 1$$

و هي معادلة بواسون.

لكن نعلم أن: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z$ كذلك $\nabla.v = \frac{\partial v}{\partial x}a_x + \frac{\partial v}{\partial y}a_y + \frac{\partial v}{\partial z}a_z$ أذن:

$$\nabla.(\nabla.v) = \nabla^2 v = \left(\frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}a_x + \frac{\partial v}{\partial y}a_y + \frac{\partial v}{\partial z}a_z\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$\nabla^2 v$ تسمي لابلاسي V.

اذا كانت $\rho_v = 0$ (كثافة الشحنة الحجمية تساوي صفراً أي هي شحنات نقطية أو خط شحنة أو كثافة شحنة سطحية) اذن:

$$\nabla^2 v = 0 \qquad \ldots\ldots 2$$

و هي معادلة لابلاس.

في الأحداثيات الكارتيزية تكون معادلة لابلاس علي الصورة:

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \qquad \ldots\ldots 3$$

و في الأحداثيات الأسطوانية تكون معادلة لابلاس علي الصورة:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \qquad \ldots\ldots 4$$

و في الأحداثيات الكروية تكون معادلة لابلاس علي الصورة:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} = 0 \qquad \ldots\ldots 5$$

Example:

حدد ما إذا كانت مجالات الجهود التالية تحقق معادلة لابلاس أم لا؟

1- $v = x^2 - y^2 + z^2$.

2- $V = \rho \cos\varphi + z$.

3- $V = r\cos\theta + \varphi$.

Solution:

1-

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 (x^2 - y^2 + z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (x^2 - y^2 + z^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (x^2 - y^2 + z^2)}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v = 2 - 2 + 2 = 2 \neq 0.$$

لا تحقق معادلة لابلاس.

2-

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial(\rho\cos\phi + z)}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2(\rho\cos\phi + z)}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2(\rho\cos\phi + z)}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\rho}\cos\phi - \frac{1}{\rho}\cos\phi - 0 = 0$$



تحقق معادلة لابلاس.

3-

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(r\cos\theta + \phi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(r\cos\theta + \phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2(r\cos\theta + \phi)}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r^2}2r\cos\theta + \frac{1}{r^2\sin\theta}(-2r\sin\theta\cos\theta) + 0 = 0$$

منسق:متوسط

محذوف: 1

1

تحقق معادلة لابلاس.

قانون بيو – سافار : *Biot – Savart Law*

ينص علي أنه عند أي نقطة P فان شدة المجال المغنطيسي الناتج عن عنصر تفاضلي تتناسب طرديا مع حاصل ضرب التيار و مقدار الطول التفاضلي و عكسيا مع مربع المسافة بين العنصر التفاضلي و النقطة P.

$$dH \propto I.dL \text{........}and\text{........} dH \propto \frac{1}{R^2} \Rightarrow dH \propto \frac{I.dL}{R^2}$$

dH مقدار شدة المجال المغنطيسي الناتج، dL طول العنصر التفاضلي، R المسافة بين العنصر التفاضلي و النقطة P. إذن:

$$dH = K\frac{I.dL}{R^2} \text{...........}and\text{..........} K = \frac{1}{4\pi}$$

إذن يمكن كتابة: $dH = \frac{I.dL}{4\pi R^2}$..................................6 وهو قانون بيو – سافار.

و هو يشبه قانون كولوم حيث أن:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2} a_r ......and.......dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2} a_r$$

و الصورة التكاملية لقانون بيو – سافار تأخذ الشكل التالي:

$$H = \oint \frac{I.dL}{4\pi R^2} a_R ....7$$

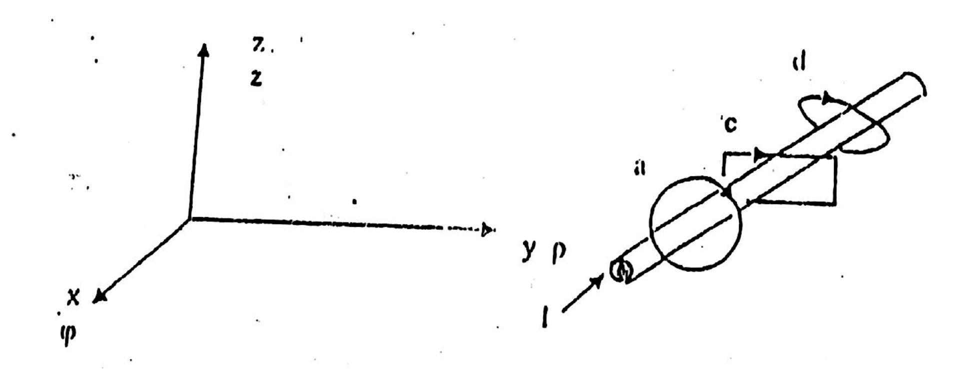
قانون امبير الدائرى: *Ampere's Circular Law*

لاحظنا أن كثير من المسائل التي حلت بواسطة قانون كولوم أمكن حلها بواسطة قانون جاوس، كذلك هنالك قانون أخر يمكن إستخدامة في حل كثير من المسائل و هو قانون امبير الدائرى الذي يسمي أحيانا قانون الشغل لأمبير.

و هو ينص علي أن التكامل الخطي لشدة المجال المغنطيسي حول أي مسار مغلق يساوي التيار المستمر المحصور بذلك المسار. (ببرهن تجريبيا). اذن:

$$\oint H dL = I ....8$$

(تيار موجب يعني ذلك انه في إتجاه تقدم بريمة ماكسويل و إتجاه المجال هو في اتجاه إداره البريمة).



إذا أخذنا المسار الدائري الذي نصف قطره ρ يكون قانون امبير الدائرى علي الصورة : (لاحظ أن التيار في إتجاه φ فقط كما في الرسم أعلاه).

$$\oint H dL = \int_{\phi=0}^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = H_\phi \rho \phi \Big|_{\phi=0}^{2\pi} = H_\phi \rho (2\pi) = I$$

$$\Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} ....9$$

و يكتب الإلتواء علاقة على الصورة: $CurlH = \nabla \times H$

و في الأحداثيات الأسطوانية يأخذ الإلتواء الصورة التالية:

$$CurlH = \nabla \times H = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)a_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)a_\phi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)a_z \quad \text{.........11}$$

و في الأحداثيات الكروية يأخذ الإلتواء الصورة التالية:

$$CurlH = \nabla \times H = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right)a_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right)a_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right)a_\phi \quad \text{.........12}$$

$$Curl H = \nabla \times H = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(3)}{\partial\phi} - \frac{\partial(-4\rho\sin\phi)}{\partial z}\right)a_\rho + \left(\frac{\partial(2\rho\cos\phi)}{\partial z} - \frac{\partial(3)}{\partial\rho}\right)a_\phi +$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho((-4\rho\sin\phi)))}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(2\rho\cos\phi)}{\partial\phi}\right)a_z$$

$$\therefore Curl H = \nabla \times H = -6\sin\phi a_z$$

3-

$$Curl H = \nabla \times H = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(H_\phi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right)a_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right)a_\theta +$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)a_\phi$$

$$Curl H = \nabla \times H = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial((0)\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(-3r\sin\theta)}{\partial\phi}\right)a_r +$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(2r\cos\theta)}{\partial\phi} - \frac{\partial(r(0))}{\partial r}\right)a_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r(-3r\sin\theta))}{\partial r} - \frac{\partial(2r\cos\theta)}{\partial\theta}\right)a_\phi$$

$$\therefore Curl H = \nabla \times H = -4\sin\theta a_\phi$$

$$\oint H dL = \int_s (\nabla \times H) dS \quad \text{.........} 13$$

و هي نظرية ستوكس.

Example:

لحسب كلاً من طرفي نظرية ستوكس للمجال المعطي بالعلاقة:

$$H = 6r\sin\phi a_r + 18r\sin\theta\cos\phi a_\phi$$

حيث أن: $r = 4....\&....0 \le \theta \le 0.1\pi.....\&....0 \le \phi \le 0.3\pi$

Solution:

$$\oint H dL = \int_s (\nabla \times H) dS$$

$$dL = dr_{ar} + r d\theta_{a\theta} + r\sin\theta d\phi_{a\phi} d\phi$$
$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi_{ar}$$

إتجاه التيار هو a_ϕ فقط. إذن:

$$\oint H dL = \oint (6r\sin\phi a_r + 18r\sin\theta\cos\phi a_\phi)(dr_{ar} + r d\theta_{a\theta} + r\sin\theta d\phi_{a\phi}) =$$
$$\oint H dL = \oint (6r\sin\phi dr + 18r\sin\theta\cos\phi (r\sin\theta) d\phi) .....But...r = Constant....so$$
$$\oint H dL = \oint (18r\sin\theta\cos\phi (r\sin\theta d\phi) d\phi) = \oint 18r^2\sin^2\theta\cos\phi d\phi$$
$$\oint H dL = \int_{\phi=0}^{0.3\pi} 18r^2\sin^2\theta\cos\phi d\phi = \left[18r^2\sin^2\theta\sin\phi\right]_{\phi=0}^{0.3\pi} =$$
$$(18r^2\sin^2\theta\sin(0.3\pi)) - (18r^2\sin^2\theta\sin(0)) = (18r^2\sin^2\theta\sin(0.3\pi))$$
$$But..r = 4..and\theta = 0.1\pi...so...$$
$$\oint H dL = (18(4)^2 \times \sin^2(0.1\pi) \times \sin(0.3\pi)) = 22.2A \quad \text{.........} 1$$

$$\int_s (\nabla \times H) dS$$